

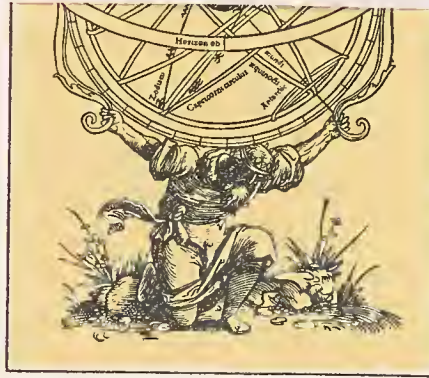




**BURNDY
LIBRARY**

Chartered in 1941

GIFT OF
BERN DIBNER



L. P. Thigand

Jan 19: 1827



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè scripta

DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.



BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

clb lccc XIII.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

DEPARTMENT OF THE HISTORY OF ARTS

1950



1950

QA
273.43
B52
1713
RB
NMAH

NICOLAUS BERNOULLI

L. S.

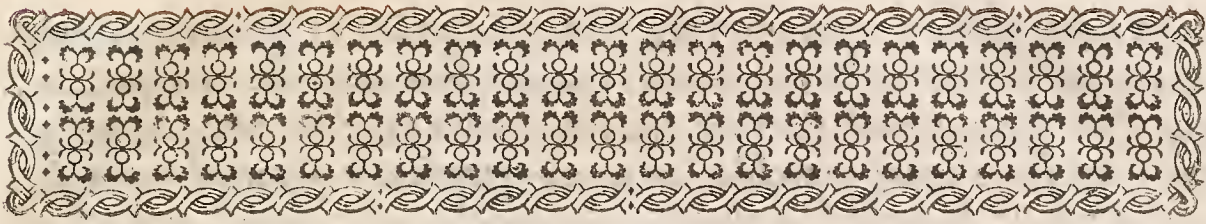


Rodit nunc tandem diu desideratus Patru
mei de Arte Conjectandi Tractatus post-
humus curâ Thurnisiorum Fratrum, qui
rem gratam publico facturi Manuscri-
ptum Auctoris ab heredibus defuncti
comparatum suis sumtibus imprimi cu-
raverunt. Propositum fuit Auctori monstrare eximium
usum quem in vita civili habet ea Matheseos pars, à pau-
cis hactenus tractata, quæ de probabilitatibus dimetien-
dis agit. Qua ratione & quousque Auctor hoc suum
propositum executus fuerit jam recensitum est in Com-
mentariis Academiæ Regiæ Scientiarum Gallicæ Anni
1705. & in Ephemeridibus Eruditorum Parisiensibus
Anni 1706. Divisit Auctor Opus istud in quatuor Partes,
quarum I^{ma} continet Illustris Hugeni Diatribam de Ra-
tiociniis in Aleæ Ludo cum Annotationibus, quam Tra-
ctatui suo tanquam prima Artis Conjectandi elementa
præmittendam esse judicavit. II^{da} Pars complectitur
Doctrinam de Permutationibus & Combinationibus ad
dimetiendas probabilitates sumopere necessariam, cujus
Usum Parte III^{ta} in variis Sortitionibus & Ludis Aleæ ex-
plicuit. IV^{ta} Partem qua usum & applicationem præ-
cedentium ad res civiles, morales & œconomicas osten-
dere voluit, adversa diu usus valetudine tandemque ipsa
morte præventus imperfectam reliquit. Optassent qui-
dem Editores, ut Defuncti Frater, qui unice absolvendo
huic operi maxime idoneus fuisset, defectum supple-
visset; sed ipsi plurimis aliis districto negotiis operæ hu-
jus demandatione noluerunt esse molesti. Mihi quoque,
quem olim Specimina quædam hujus Artis ad Jus appli-
catae in Dissertatione Inaugurali dedisse noverant, id ne-
gotii deferre in animo habebant, quod vero absens & in

peregrinatione constitutus suscipere non poteram. Reversus in Patriam denuoque rogatus operam hanc declinavi, cum juvenem me longoque rerum usu & experientia ad materiam hanc tractandam necessaria haud intructum negotio huic imparem fore sentirem, facileque judicarem, non tantum Lectori non satisfactum, sed etiam reliquis pretium ademtum iri, si vulgaria duntaxat & trita afferrem. Suafor itaque fui, ut Tractatus iste qui maxima ex parte jam impressus erat, in eodem quo eum Auctor reliquit statu cum publico communicaretur. Ne vero res utilissima, applicatio scilicet calculi probabilitatum ad œconomica & politica, plane negligatur, rogamus Nobiliss. D. Auctorem Libri Gallici *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard*; Clariss. item Moyvræum, quorum uterque egregia hujus Artis Specimina non ita pridem publicavit, ut ipsi negotium hoc in se suscipere, eximiaque sua inventa cum publico suo tempore communicare dignentur. Speramus interim generalia illa, quæ Auctor quinque postremæ Partis capitibus tradit, Lectori industrio in specialium quæstionum enodatione non contemnendo usui fore. Hæc de ipso Tractatu præfanda esse censuimus. Adjunctæ sunt ab Editoribus Positiones Auctoris de Seriebus Infinitis, quinque Disputationibus olim ab ipso pertractatæ, quarum cum exemplaria multa hæctenus frustra apud Bibliopolas nostros quæsitæ fuerint, illas simul impressas Tractatui isti subjecerunt. Accedit quoque ob cognatam materiam Epistola Auctoris Gallica cui titulus: *Lettre à un Amy, &c.* Illud etiam monendum est Typum variationum Versus Bauhusiani, *Tot tibi* &c. inter schedas Auctoris repertum à Correctore in gratiam Curiosorum insertum fuisse, adeoque postrema verba paginæ 78. omittenda esse. Reliquos errores, paucos quidem, à Correctore non observatos in calce Libri notavimus, quos ut Lector benevolus corrigat, precamur.

ARTIS

DSI



LETTRE

à un Amy,

sur

les Parties du Jeu de Paume.



Vous me marquez, Monsieur, que vous avez vû une de mes Theses, où j'avance quelques Propositions nouvelles, touchant les Parties du Jeu de Paume; & vous me demandez, si ces Propositions renferment quelque realité qui puisse être démontrée, ou si elles ne sont fondées que sur de pures conjectures faites en l'air, & qui n'ont rien de solide; ne pouvant pas concevoir, à ce que vous dites, que l'on puisse mesurer les forces des jouëurs par nombres, & encore moins en tirer toutes les conclusions, que j'en ay tirées. Ce qui m'oblige de mettre par écrit tout ce que j'ay medité sur cette matiere, & d'en faire le sujet de cette Lettre, que je vous écris en François, pour ne vous pas rebuter dans sa lecture par la traduction des termes qui sont en usage parmy les jouëurs, & qui deviendroient peu intelligibles, si on les mettoit en une autre Langue. Je ne m'arrête pas à vous y expliquer les Regles du Jeu, ni le principe de l'Art de conjecturer, qui doit servir de fondement à nôtre recherche, sachant que l'un & l'autre

vous

vous font parfaitement connus. Mais au reste j'entre dans le détail de toutes les particularités de mon sujet, sans craindre le reproche, que l'on me pourroit faire de vous entretenir trop sur une bagatelle; car vous savez, que ce noble Jeu a toujours fait le divertissement des personnes de la première qualité, & bientôt vous verrez, que s'il est utile pour l'exercice du corps, il est tres-capable & tres-digne aussi de fixer les meditations de l'esprit.

Je vous feray remarquer avant toutes choses, que la raison, pour laquelle dans les jeux de hazard on peut supputer exactement les avantages & les desavantages des Joueurs, c'est parce que le plus souvent l'on connoit au juste le nombre des cas, qui leur sont favorables ou contraires: & je dois vous dire, qu'il n'en est pas de même des jeux, qui dépendent uniquement, ou en partie, du genie, de l'industrie ou de l'adresse des joueurs, tels que sont les jeux de la paume, des échecs, & la plupart des jeux de cartes; étant bien visible, que l'on ne sauroit déterminer par les causes, ou *à priori*, comme l'on parle, de combien un homme est plus savant, plus adroit ou plus habile qu'un autre, sans avoir une parfaite connoissance de la nature de l'ame, & de la disposition des organes du corps humain, laquelle mille causes occultes, qui y concourent, rendent absolument impossible. Mais cela n'empêche pas, qu'on ne puisse le savoir presque aussi certainement, *à posteriori*, par l'observation de l'événement plusieurs fois réitérée, en faisant ce qui se peut pratiquer dans les jeux même de pur hazard, lors qu'on ne sçait pas le nombre des cas, qui peuvent arriver. Posons, qu'il y ait dans un sac quantité de billets en partie blancs & en partie noirs, & que je ne sache pas le nombre des uns ni des autres; que ferois-je pour le découvrir? je les tirerois l'un après l'autre, (en remettant chaque fois dans le sac le billet, que j'en aurois tiré, avant que de prendre le suivant, afin que le nombre des billets du sac ne diminuât point) & si j'observois cent fois que j'en tirâsse un noir, & deux cent fois, que j'en tirâsse un blanc, je ne hésiterois pas à conclure, que le nombre des blancs ne fût environ le double de celui des noirs; car il est tres-sur, que plus je ferois de ces observations en tirant, plus je pourrois espérer d'approcher de la véritable raison, qui se trouve

entre

entre les nombres des ces deux sortes de billets; étant même une chose démontrée, qu'on en peut tant faire, qu'il sera à la fin probable de toute probabilité donnée, & par conséquent qu'il sera moralement certain, que la raison d'entre ces nombres, que l'on aura ainsi trouvée par expérience, difère de la véritable d'aussi peu que l'on voudra: qui est tout ce qu'on peut souhaiter, C'est aussi de cette maniere, que dans les jeux d'art & d'adresse on peut connoître de combien un joueur est plus fort que l'autre joueur. Je vois par exemple deux hommes, qui jouënt à la paume: je les observe long temps, & je remarque, que l'un d'eux gagne 200 ou 300 coups, pendant que l'autre n'en gagne que cent: je juge par là, avec assez de certitude, que le premier est deux ou trois fois meilleur joueur que l'autre, ayant pour ainsi dire deux ou trois parties d'adresse, comme autant de cas ou de causes qui luy font gagner la balle, là où l'autre n'en a qu'une.

I. Cecy étant compris, mettons, pour entrer en matiere, deux joueurs égaux A & B (c'est à dire, à qui nous ayons vû gagner & perdre un pareil nombre de coups) qui soient premièrement à deux, ou trentains, ou quinzains, ou à but. Il est évident, qu'ils ont tous deux une égale esperance de faire les coups qui leur manquent, & de gagner ainsi le jeu; c'est pourquoy le sort de chacun est estimé $\frac{1}{2}$ J ou $\frac{1}{2}$ Jeu. Mettons ensuite, qu'A ait 30 & B 45, ou (ce qui revient à un) que celui-cy ait l'avantage: vous voyez, qu'il est bien autant probable, qu'A gagnera ou perdra le coup suivant; mais s'il le gagne, ils redeviendront à deux & chacun aura, comme j'ay dit, $\frac{1}{2}$ J; & s'il le perd, il perdra aussi le jeu; c'est ce qui luy vaut, par la

Doctrine que vous sçavez, $\frac{1 \cdot 1:2 + 1 \cdot 0}{2} \propto \frac{1}{4}$ J. Mettons encore,

que A ait 15 à 45; il est clair aussi, qu'il luy est également possible, de gagner 30 à 45, & d'avoir ainsi le sort précédent $\frac{1}{4}$ J, ou de perdre le jeu (selon qu'il gagne ou perd le premier coup) c'est-ce qui

rend maintenant son sort $\frac{1 \cdot 1:4 + 1 \cdot 0}{2} \propto \frac{1}{8}$ J. Que si A avoit 15 à 30, un cas le rendroit trentain & un autre 15 à 45, (dont celui-là luy

amene $\frac{1}{2}$ J, & celui-cy $\frac{1}{8}$ J) ce qui luy vaudroit alors $\frac{1 \cdot 1:2 + 1 \cdot 1:8}{2}$

Table I.

Points de		Sort de
A	B	A
45	45	$\frac{1}{2}J.$
30	45	$\frac{1}{4}J.$
15	45	$\frac{1}{8}J.$
0	45	$\frac{1}{16}J.$
30	30	$\frac{1}{2}J.$
15	30	$\frac{5}{16}J.$
0	30	$\frac{3}{16}J.$
15	15	$\frac{1}{2}J.$
0	15	$\frac{11}{32}J.$
0	0	$\frac{1}{2}J.$

Table II.

Jeux de		Sort de
A	B	A
3	3	$\frac{1}{2}P.$
2	3	$\frac{1}{4}P.$
1	3	$\frac{1}{8}P.$
0	3	$\frac{1}{16}P.$
2	2	$\frac{1}{2}P.$
1	2	$\frac{5}{16}P.$
0	2	$\frac{3}{16}P.$
1	1	$\frac{1}{2}P.$
0	1	$\frac{11}{32}P.$
0	0	$\frac{1}{2}P.$

$\infty \frac{5}{17} J.$ L'on trouvera tout de même les sorts d'A pour les autres hipotéses, comme ils sont marqués dans cette Table. Pour ceux de B, ils sont aisés à suppléer, étant toujours les restes de ceux d'A à l'unité.

II. De même si les deux joueurs sont à deux de jeu, il est manifeste, que chacun d'eux peut également espérer de gagner la Partie, en faisant deux jeux de suite; & que par conséquent le sort de chacun est $\frac{1}{2}P$ ou $\frac{1}{2}$ Partie. Mais si (la Partie se faisant par exemple à quatre jeux) A en avoit gagné 2, & B 3, ou (ce qui est le même) si B avoit l'avantage du jeu, il y auroit autant d'apparence, que le premier jeu les rendit à deux de jeu, ou qu'il fit perdre la Partie à A (selon que celui-cy gagneroit ou perdrait ce jeu) ce

qui luy feroit avoir $\frac{1 \cdot 1:2 + 1 \cdot 0}{2} \infty \frac{1}{4} P.$

L'on conclut de même, que si A avoit un jeu, & B trois, le sort d'A seroit $\frac{1}{8}P$. Et ainsi du reste, comme vous voyez dans cette autre Table, qui comprend les sorts d'A par rapport à toute la Partie. Vous jugez, qu'elle doit être la même que la première; car ce que les 4 coups d'un jeu sont à l'égard de ce jeu, les 4 jeux le sont à l'égard de toute la Partie.

III. Considérons encore les deux joueurs, comme étant à deux de jeu, & donnons en outre à A 30 & à B 45: vous voyez que le premier coup doit les mettre à deux, & ainsi égaux leur sort, si A gagne le

Table III.

Jeux de A	III. ou II.		II.	III.	I.		O.	III.	I.	II.	O.	I.	O.	O.
	III.	II.			III.	III.								
Jeux de B														
Points de A. B.														
45.45	1: 2	1: 4	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	3: 16	1: 2	11: 32	1: 2	11: 32	1: 2	11: 32
30.45	3: 8	1: 8	1: 8	1: 16	1: 32	7: 32	1: 16	1: 8	1: 32	1: 8	1: 32	1: 16	1: 32	1: 8
15.45	5: 16	1: 16	1: 16	1: 32	1: 64	11: 64	3: 16	3: 32	1: 64	3: 32	1: 16	3: 64	1: 32	1: 16
0.45	9: 32	1: 32	1: 32	1: 64	1: 128	19: 128	5: 16	5: 32	1: 128	5: 32	1: 64	5: 64	1: 128	5: 32
45.30	5: 8	3: 8	3: 8	3: 16	3: 32	13: 32	1: 4	1: 8	1: 32	1: 4	1: 8	1: 16	1: 32	1: 4
30.30	1: 2	1: 4	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	3: 16	1: 16	3: 16	1: 8	1: 16	1: 16	1: 8
15.30	13: 32	5: 32	5: 32	5: 64	5: 128	31: 128	9: 64	9: 64	1: 128	9: 64	1: 64	1: 128	1: 64	1: 32
0.30	11: 32	3: 32	3: 32	3: 64	3: 128	25: 128	7: 64	7: 64	1: 128	7: 64	1: 64	1: 128	1: 64	1: 32
45.15	11: 16	7: 16	7: 16	7: 32	7: 64	29: 64	9: 32	9: 32	1: 64	9: 32	1: 32	1: 64	1: 32	1: 16
30.15	19: 32	11: 32	11: 32	11: 64	11: 128	49: 128	15: 64	15: 64	1: 128	15: 64	1: 64	1: 128	1: 64	1: 32
15.15	1: 2	1: 4	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	3: 16	1: 16	3: 16	1: 8	1: 16	1: 8	1: 4
0.15	27: 64	11: 64	11: 64	11: 128	11: 256	65: 256	19: 128	19: 128	1: 256	19: 128	1: 128	1: 256	1: 128	1: 64
45. 0	23: 32	15: 32	15: 32	15: 64	15: 128	61: 128	19: 64	19: 64	1: 128	19: 64	1: 64	1: 128	1: 64	1: 32
30. 0	21: 32	13: 32	13: 32	13: 64	13: 128	55: 128	17: 64	17: 64	1: 128	17: 64	1: 64	1: 128	1: 64	1: 32
15. 0	37: 64	21: 64	21: 64	21: 128	21: 256	95: 256	29: 128	29: 128	1: 256	29: 128	1: 128	1: 256	1: 128	1: 64
0. 0	1: 2	1: 4	1: 4	1: 8	1: 16	5: 16	3: 16	3: 16	1: 16	3: 16	1: 8	1: 16	1: 8	1: 4

616 (5) 616

gne le coup; & s'il le perd, que B doit avoir l'avantage du jeu, auquel cas nous avons trouvé le fort d'A $\frac{1}{4} P$: c'est pourquoy l'espérance qu'il a de gagner la Partie est maintenant $\frac{1 \cdot 1:2 + 1 \cdot 1:4}{2} \propto \frac{3}{8} P$.

Supposons ensuite, que A ait deux jeux (ou un jeu) & B trois, & qu'ils soient à deux, ou trentains, ou quinzains; il est visible, que chacun pouvant également gagner le jeu, c'est tout comme s'ils n'avoient rien au de là de leurs jeux, de sorte que le fort d'A est encore, comme il a été trouvé dans l'article précédent, $\frac{1}{4} P$ (ou $\frac{1}{6} P$). Mais si A avoit 2 jeux à 3, & 30 à 45, il pourroit également acquérir 45, ou perdre la Partie avec le jeu (suivant qu'il gagneroit ou perdrait le

premier coup) ce qui luy vaudroit $\frac{1 \cdot 1:4 + 1 \cdot 0}{2} \propto \frac{1}{8} P$. Et si outre les 2 jeux à 3 il n'avoit que 15 à 45, le premier coup luy pourroit également donner 30 à 45, ou luy faire perdre le jeu & la Partie; ce qui alors rendroit son fort $\frac{1 \cdot 1:8 + 1 \cdot 0}{2} \propto \frac{1}{16} P$. &c. C'est de cette

manière, que j'ay calculé la troisième Table, qui comprend les forts d'A pour tous les états possibles des deux joueurs, lors qu'outre les jeux entiers ils ont encore gagné quelques points. Elle est donc générale, & elle renferme aussi dans les derniers chiffres de ses rangs perpendiculaires toute la deuxième Table. Si vous prenez la peine de l'examiner, vous y pourrez faire plusieurs reflexions dignes de remarque. Vous verrez par ex. que 15 à 30, les joueurs étant à deux de jeu, valent tout juste autant, que 30 à rien avec deux jeux à trois, ou 45 à 30 avec un jeu à deux, ou enfin 30 à 45 avec un jeu à un: qu'un jeu à deux avec 45 à 15 vaut tant soit peu mieux pour A, que s'ils étoient encore au commencement de la Partie, & que A n'eût rien & B 15, n'y ayant que $\frac{1}{3} \frac{1}{12}$ de différence entre les forts de ces deux hipotèses. &c.

IV. Tachons présentement de découvrir les forts de joueurs, quand ils sont d'inégale force: Pour abreger le calcul, soit pris généralement n pour le nombre des coups, qu'on ait vû gagner au plus fort A, contre lesquels le plus foible B n'en ait gagné qu'un; de sorte que

te que n à 1 marque la raison des forces des deux joueurs ; après quoy mettons, qu'ils soient à deux, & qu'il faille trouver leur fort. Si un seul coup suffisoit à chacun d'eux pour gagner le jeu, la question seroit déjà décidée ; puisque la raison de n à 1 , qui est celle de leurs forces, seroit aussi celle de leurs espérances pour ce jeu-là ; mais parce que les loix du jeu en ont ordonné autrement, & qu'elles demandent qu'on gagne deux coups de suite pour gagner le jeu, la raison qu'on cherche est différente de celle-là, & il faut un peu d'analyse pour la trouver. Sachant donc, qu'après le premier coup l'un doit avoir l'avantage, & qu'après le second coup le jeu se peut remettre à deux, & qu'étant à deux il retourne le même fort inconnu, que nous voulons chercher, appellons le fort d'A en cet état x , & considérons ce qui arriveroit, si l'un ou l'autre gaignoit l'avantage. Or si A le gagne, qui est n fois plus habile joueur que l'autre, il y aura pour luy n apparences de gagner le jeu, & une apparence de se remettre à deux (suivant qu'il gagnera aussi ou perdra l'autre coup)

ce qui luy vaut $\frac{n \cdot 1 + 1 \cdot x}{n + 1} \propto \frac{n + x}{n + 1}$: & si c'est B qui gagne l'avantage, il y aura pour A n vraysemblances de se remettre à deux, &

une vraysemblance de perdre le jeu ; ce qui luy fait $\frac{n \cdot x + 1 \cdot 0}{n + 1} \propto$

$\frac{nx}{n + 1}$. D'où il s'ensuit, que les joueurs étant encore à deux, auquel

cas il y a pour A par la même raison n fois plus de vraysemblances de gagner l'avantage, que de le perdre, son fort doit être

$\frac{n \cdot n + x : n + 1 + 1 \cdot nx : n + 1}{n + 1} \propto \frac{nn + 2nx}{nn + 2n + 1}$, & parce que le même

est appelé x , il y aura $x \propto \frac{nn + 2nx}{nn + 2n + 1}$; ce qui nous donne x

$\propto \frac{nn}{nn + 1}$, & reste pour le fort de la Partie $\frac{1}{nn + 1}$, tellement que

leurs sorts sont entre eux en raison de nn à 1 , doublée de celle de leurs forces n à 1 . Cecy étant établi, l'on pourra continuer par ordre nôtre recherche pour toutes les autres hipotèses, comme on a fait dans les articles précédens, pourvû qu'on se souviene icy, qu'à chaque coup il est n fois plus probable, que A gagne ce coup, qu'il n'est probable, qu'il le perde : Posé donc par exemple, qu'A ait 30

& B

Table IV.

Points de		Sorts de A.
A	B	
45	45	$\frac{nn}{nn+1}$
30	45	$\frac{n^3}{n^3+nn+n+n+1}$
15	45	$\frac{n^4+2n^3+2nn+2n+1}{n^4}$
0	45	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}{n^5}$
45	30	$\frac{n^3+nn+n}{n^3+nn+n+1}$
30	30	$\frac{nn}{nn+1}$
15	30	$\frac{n^5+3n^4+n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	30	$\frac{n^6+4n^5+n^4}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
45	15	$\frac{n^4+2n^3+2nn+2n}{n^4+2n^3+2nn+2n+1}$
30	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+3nn}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
15	15	$\frac{n^5+3n^4+4n^3}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
0	15	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+5n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
45	0	$\frac{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n}{n^5+3n^4+4n^3+4nn+3n+1}$
30	0	$\frac{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+6nn}{n^6+4n^5+7n^4+8n^3+7nn+4n+1}$
15	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+10n^3}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$
0	0	$\frac{n^7+5n^6+11n^5+15n^4}{n^7+5n^6+11n^5+15n^4+15n^3+11nn+5n+1}$

& B 45; il y a n cas qui mettent le jeu à deux, & un cas qui le fait perdre à A; ce qui luy vaut $\frac{n \cdot nn : nn + 1 + 1 \cdot 0}{n + 1} \propto \frac{n^3}{n^3 + nn + n + 1}$.

Posé qu'A ait 15 à 45, il y a n cas, qui luy font gagner 30 à 45 & encore un cas qui luy fait perdre le jeu; ce qui luy fait naître le sort

$$\frac{n \cdot n^3 : n^3 + nn + n + 1 + 1 \cdot 0}{n + 1} \propto \frac{n^4}{n^4 + 2n^3 + 2nn + 2n + 1}.$$

On trouve de la même manière le sort d'A, quand il n'a rien & B 45. Lors qu'ils sont trentains, ils ont le même sort qu'étant à deux, parce qu'il leur faut aussi gagner deux coups de suite, pour faire le jeu. On trouvera de même leur sort, A ayant 15 ou 0, & B 30. Semblablement on cherche les sorts, A ayant 45, & B 30, 15 ou 0; comme aussi A ayant 30, & B 15 ou 0. Ainsi l'on ne peut ignorer les sorts, quand ils sont quinzains, où A ayant 0 & B 15, ou au contraire A 15 & B 0, ou enfin quand ils sont encore à but. C'est ce qui produit la quatrième Table, où est contenüe la valeur des espérances de A (par raport à chaque jeu) généralement pour toute sorte de raisons, qu'on puisse imaginer entre les forces des jouëurs:

V. Vous jugez bien, que si vous y prenez n pour 1, il en doit resulter la première Table, faite pour des jouëurs d'égale force: & si vous faites valoir successivement cette lettre pour 2, 3, 4. &c. la Table servira pour des jouëurs, dont l'un est deux, trois, ou quatre fois plus fort que l'autre. Si par exemple A est deux fois plus fort que B, vous trouverez son sort, étant à deux, $\frac{4}{5} J$; & ayant 30 à 45 vous le trouverez $\frac{8}{15} J$; de sorte qu'il restera pour celui de B, $\frac{1}{5} J$ & $\frac{7}{15} J$; & par conséquent les sorts des deux jouëurs en ces cas seront entre eux en raison de 4 à 1, & de 8 à 7, & ainsi de tout le reste, comme il est représenté dans la cinquième Table.

Vous vous souviendrez pourtant de ce que j'ay dit, que ces Tables ne servent que pour chaque jeu séparément; car il en faudroit encore donner une semblable, qui comprit les sorts des jouëurs par raport à toute la Partie, lors qu'ils jouënt à plusieurs jeux, dont ils ont déjà gagné quelques uns, avec quelques points encore, si vous voulez; comme j'ay fait la troisième Table pour des jouëurs égaux: mais parce que la continuation de cette recherche par lettres seroit

Table V.

<i>Points de</i>		<i>Raisons de leurs sorts, A étant plus fort que B,</i>					
A	B	2 fois		3 fois		4 fois.	
45	45	4 .	1	9 .	1	16 .	1
30	45	8 .	7	27 .	13	64 .	21
15	45	16 .	29	81 .	79	256 .	169
0	45	32 .	103	243 .	397	1024 .	1101
45	30	14 .	1	39 .	1	84 .	1
30	30	4 .	1	9 .	1	16 .	1
15	30	88 .	47	513 .	127	1856 .	269
0	30	208 .	197	891 .	389	8448 .	2177
45	15	44 .	1	159 .	1	424 .	1
30	15	124 .	11	621 .	19	2096 .	29
15	15	112 .	23	297 .	23	2048 .	77
0	15	176 .	67	891 .	133	49408 .	3717
45	0	134 .	1	639 .	1	2124 .	1
30	0	392 .	13	1269 .	11	10592 .	33
15	0	224 .	19	999 .	25	52608 .	517
0	0	208 .	35	243 .	13	51968 .	1157

tres-pénible, & demanderoit un calcul immense, je me contenteray de faire voir dans un exemple particulier, comment il s'y faudroit prendre, pour trouver en abrégé ce qu'on cherche. Supposons, que la Partie se face à 4 jeux: que A ait un jeu & outre cela 15, B deux jeux avec 45, & que A soit deux fois plus fort que B; on veut sçavoir la valeur des espérances qu'ils ont de gagner la Partie. Remarquons avant toute chose que les facilités, qu'ont ces joueurs à gagner chaque jeu étant encore à but, sont entre elles par la cinquième Table en raison de 208 à 35, ou bien de $\frac{208}{35}$ à 1; & que par conséquent celui qui est deux fois plus fort qu'un autre, aura $\frac{208}{35}$ fois (c'est près de six fois) plus de facilité pour gagner ce jeu: ensuite de quoy considérons, que le jeux, dont ils ont déjà fait une Partie, étant

étant achevé, ils auront ou deux jeux à deux, ou un jeu à trois (suivant que l'un ou l'autre l'aura gagné) en quelle situation il leur manquera encore ou deux jeux à chacun, ou trois jeux à A & un jeu à B. Or il est bien clair, que c'est alors tout comme s'il leur manquoit seulement autant de coups, qu'il leur manque de jeux (c'est à dire comme s'ils estoient trentains, ou 15 à 45) supposé que la facilité, que le plus fort a de gagner un jeu entier, fût celle, qu'il a de gagner un simple coup, & que nous avons nommée n . Mais cette facilité, comme je viens de dire, est exprimée par $\frac{208}{35}$; si vous substituez donc cette fraction numerique à la place de n dans les quantités

$$\frac{nn}{nn+1} \text{ \& } \frac{n^4}{n^4+2n^3+2nn+2n+1},$$

qui marquent, par la 4^{me} Table, le sort de A quand il est trentain ou 15 à 45, vous aurez les sorts, qui luy tombent quand il a deux jeux à deux, ou un jeu à trois, qui seront ainsi $\frac{43264}{44489} P$ & $\frac{1871773626}{2627030961} P$. Et par ce que l'on suppose, que ce joueur a 15 à 45 du jeu qu'on joue présentement, auquel état il a 16 cas de gagner ce jeu, & 29 cas de le perdre, par la cinquième Table; il s'ensuit, qu'il y a 16 cas qui luy acquièrent deux jeux à deux, & 29 cas, qui luy font avoir un jeu à trois, ce qui rend la valeur de son espérance à gagner la Partie,

$$16 \cdot \frac{43264}{44489} + 29 \cdot \frac{1871773626}{2627030961} \propto \frac{19031314432}{23643278649} P;$$

& il reste pour celle de B, $\frac{4611964217}{23643278649} P$; de sorte que ces espérances sont entre elles en raison de 19031314432 à 4611964217, qui est un peu plus que quadruple. Mais passons plus outre.

VI. Si le raport des forces de deux joueurs est connu, l'on peut sçavoir, combien l'un doit donner d'avantage à l'autre pour rendre le jeu égal. On n'a qu'à jeter les jeux sur la cinquième Table, pour voir où les nombres, qui marquent le raport de leurs espérances, s'aprochent le plus. C'est ainsi que nous observons, que lorsque A est deux fois plus fort que B, leurs sorts différent le moins, A n'ayant rien & B 30; de sorte que A peut donner à B 30, & même avec quelque petit avantage pour soy, son espérance à gagner le jeu étant tant soit peu plus grande que celle de B. Si A est trois fois plus fort que B, & qu'il luy donne 45, nous voyons, qu'il y a un avantage notable pour B, mais qu'il y a beaucoup plus d'avanta-

ge peut luy même, s'il ne luy donne que 30. Pour rendre donc la Partie égale autant qu'il se peut, il faudroit qu'il donnât à B 45, prenant pour luy 15. Si A est quatre fois plus fort, il peut donner à B 45, pourtant avec quelque petit avantage pour B; mais s'il étoit cinq fois plus fort que B, il pourroit luy donner 45, & auroit encore un avantage assés considérable pour soy-même, puisque leurs sorts se trouveroient être comme 3125 & 2491 &c.

VII. Si A donne à B 15, ou 30, ou 45, sçavoir au contraire, de combien A est plus fort que B? Pour résoudre cette question il faut considérer, que lors que pour égaler la Partie A donne à B un avantage de quelques points, le sort de chacun doit être $\frac{x}{2}$; c'est pourquoi l'on prendra dans la Table IV les quantités, qui marquent le sort de A, lors qu'il n'a rien, & B 45, ou 30, ou 15, & on les fera chacune $\infty \frac{x}{2}$; ce qui nous fournit trois égalités:

$$\frac{n^5}{n^5 + 3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1} \infty \frac{x}{2},$$

$$\frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{n^6 + 4n^5 + 7n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1} \infty \frac{x}{2},$$

&

$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1} \infty \frac{x}{2},$$

lesquelles étant reduites seront

$$n^5 - 3n^4 - 4n^3 - 4nn - 3n - 1 \infty 0,$$

$$n^6 + 4n^5 - 5n^4 - 8n^3 - 7nn - 4n - 1 \infty 0,$$

$$n^7 + 5n^6 + 11n^5 - 5n^4 - 15n^3 - 11nn - 5n - 1 \infty 0.$$

Et parce que les racines de ces équations, qui marquent la valeur de l'inconnüe n , sont sourdes, il s'ensuit que les forces des joueurs, dont l'un donne à l'autre un avantage de quelques coups, sont incommensurables entre elles. La racine de la première est à peu près 4.216 (ou environ $4\frac{1}{5}$), de la seconde 1.946 (ou $1\frac{2}{10}$), de la troisième 1.313 (ou $1\frac{3}{10}$); ce qui fait voir, que celui qui peut donner à l'autre quarante-cinq, doit être $4\frac{1}{5}$ fois plus fort: que celui qui peut donner trente, doit être $1\frac{2}{10}$ fois; & qui peut donner quinze, $1\frac{3}{10}$ fois plus fort que l'autre: c'est à dire, que le premier doit

doit gagner 42, le second 19, & le troisieme 13 coups, lorsque leurs Parties en gagnent 10.

Or si A donne à B l'avantage, qui est necessaire pour rendre le jeu égal, ce sera toute la même chose, de jouer à un jeu, ou à deux jeux, ou à trois, ou à tant qu'il vous plaira: car s'il est également probable, que A gagne un jeu, ou qu'il le perde; il est aussi également possible, qu'il face deux jeux de suite, ou qu'il les perde; quand la partie se fait à deux jeux; ou bien qu'il gagne ou perde trois jeux, quand elle se fait à trois jeux &c.

VIII. Si A donne à B demi-15, ou demi-30, ou demi-45, sçavoir de combien A est plus fort que B? Mettons, qu'A donne à B demi-45, que la Partie se jouë à deux jeux; que B prenne au premier jeu 30, & à l'autre 45; puis derechef 30, si la Partie se remet à deux de jeu, puis 45, & ainsi alternativement; & que toutes les fois qu'il prend 30, son espérance de gagner le jeu soit à celle de A en raison de b à a , & toutes les fois qu'il prend 45, en raison de d à c . Cela posé, faisons le sort d'A au commencement de la Partie ∞z , & considérons ce qui arriveroit, si B gagnoit le premier jeu: Alors B prendroit 45, & par l'hipotése A auroit c vraisemblances de gagner le jeu suivant, & d vraisemblances de le perdre. Or si A le gagne, la Partie se remet à deux de jeu, & il faut que B reprenne 30, tout de même qu'au commencement de la Partie: mais si A le perd, il perd ensemble la Partie: d'où il suit, que le sort de A seroit

en ce cas $\frac{c^2 + d \cdot 0}{c + d} \infty \frac{c^2}{c + d}$. Que si au contraire A avoit gagné le premier jeu, B prendroit aussi 45 & A auroit après cela c aparences de gagner ensemble le jeu & la Partie; & d aparences de remettre la Partie à deux de jeu, en perdant le jeu: ainsi son sort seroit alors $\frac{c \cdot P + d \cdot z}{c + d} \infty \frac{cP + dz}{c + d}$ Enfin considérans les joueurs comme au commencement de la Partie, où B prend 30, nous voyons qu'il y a pour A, a probabilités de gagner l'avantage du jeu, c'est à dire de parvenir au sort précédent $\frac{cP + dz}{c + d}$, & b probabilités de perdre cet avantage & d'acquérir ainsi le sort $\frac{c^2}{c + d}$; ce qui luy vaut

b 3

$a \cdot cP$

$$\frac{a \cdot cP + d \cdot z : c + d + b \cdot c \cdot z : c + d}{a + b} \propto \frac{acP + adz + bcz}{a + b \quad c + d} . \quad \text{Mais nous}$$

supposons le même fort, qu'obtient A au commencement de la Partie $\propto z$; c'est pourquoi il y a égalité entre z & la dite quantité

$$\frac{acP + adz + bcz}{a + b \cdot c + d}, \text{ laquelle étant reduite on trouvera } z \propto \frac{ac}{ac + bd} P.$$

Et parce que la Partie à demi-45 est supposée égale, dans laquelle avant le commencement du jeu le fort de chacun soit $\frac{1}{2} P$, il doit y avoir encore égalité entre $\frac{1}{2} P$, & la valeur trouvée de z , d'où il résulte celle-cy $ac \propto bd$, qui nous donne l'analogie $a \cdot b :: d \cdot c$.

Cela fait voir, que la Partie sera égale, quand ces quatre quantités a, b, d, c , sont proportionnelles; c'est à dire, quand l'espérance du plus fort à gagner le jeu est à l'espérance du plus foible (ayant 30) comme reciproquement l'espérance du plus foible (ayant 45) est à celle du plus fort: ou bien, quand il y a 2, 3 ou 4 fois plus d'apparence, que le foible perde le jeu, ayant 30, & qu'il y ait au contraire autant d'apparence, qu'il le gagne, ayant 45, on luy peut donner demi-45.

Et il est à remarquer, qu'il n'importe, soit que B prenne au premier jeu 30 & à l'autre 45; ou qu'au contraire il prenne d'abord 45, & puis 30: car ayant fait nôtre calcul, pour cette dernière hi-

$$\text{potèse, nous trouverons } z \propto \frac{c \cdot aP + b \cdot z : a + b + d \cdot a \cdot z : a + b}{c + d} \propto \frac{acP + bcz + adz}{a + b \cdot c + d}, \text{ c'est à dire encore } z \propto \frac{ac}{ac + bd} P, \text{ comme auparavant.}$$

Par conséquent ceux-là se trompent, qui s'imaginent, qu'il y a de l'avantage à prendre au premier jeu le moins, & à l'autre le plus.

Or parce que le même raisonnement subsiste toujours, quelque raison que puissent marquer les lettres a, b & d, c ; il s'ensuit, qu'il en sera de même de la Partie, qui se joue à demi-30, ou à demi-15; sçavoir, qu'elle sera égale toutes les fois, que l'espérance de A par raport à chaque jeu surpasse celle de B & en est surpassée alternativement en même raison.

Pour faire l'application de ce que nous venons d'établir, il faut déter-

déterminer pour chaque hipotéfe la valeur des lettres a, b, c, d ; ce qui se fait fans peine. On n'a qu'à prendre dans la 4^{me} Table les sorts de A, quand B est suposé avoir 45, ou 30, ou 15, ou 0, à rien;

lesquels étant par ordre $\frac{n^5}{n^5 + 3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1}$,

$$\frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{n^6 + 4n^5 + 7n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$$

$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$$

$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}, \text{ ceux de B, comme}$$

les restes à l'unité, seront $\frac{3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1}{n^5 + 3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1}$,

$$\frac{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}{n^6 + 4n^5 + 7n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$$

$$\frac{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$$

$$\frac{15n^3 + 11nn + 5n + 1}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1};$$

& par conséquent les espérences d'A auront à celles de B les raisons

$$\frac{n^5}{3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1} \quad \frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$$

$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1} \quad \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1}$$

D'où il est clair, que quand la Partie se jouë à demi-45, l'on doit

faire $\frac{a}{b} \propto \frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$, & $\frac{c}{d} \propto$

$\frac{n^5}{3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1}$: quand elle se jouë à demi-30,

$\frac{a}{b} \propto$

$$\frac{a}{b} \propto \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}, \quad \& \quad \frac{c}{d} \propto \frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$$

: & enfin quand on la joue à demi-

$$15, \quad \frac{a}{b} \propto \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1}, \quad \& \quad \frac{c}{d} \propto \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$$

Substituans donc ces va-

leurs, nous aurons à la place de $ac \propto bd$, dans la première hipotèse,

$$\frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{3n^4 + 4n^3 + 4nn + 3n + 1} \text{ in } n^5 \propto \frac{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1} \text{ in}$$

dans la seconde, $\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1} \text{ in}$

$$\frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1} \text{ in } n^5 \propto \frac{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}{15n^3 + 11nn + 5n + 1} \text{ in}$$

& dans la troisième,

$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1} \text{ in } \frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1} \propto$$

c'est à dire, que la multiplication faite, nous aurons les trois égalités:

$$n^{11} + 4n^{10} + n^9 \propto 18n^8 + 48n^7 + 77n^6 + 90n^5 + 77n^4 + 49n^3 + 23nn + 7n + 1,$$

$$n^{13} + 9n^{12} + 32n^{11} + 54n^{10} + 31n^9 + 5n^8 \propto 60n^8 + 170n^7 + 256n^6 + 263n^5 + 193n^4 + 102n^3 + 38nn + 9n + 1,$$

$$n^{14} + 10n^{13} + 47n^{12} + 130n^{11} + 221n^{10} + 220n^9 + 75n^8 \propto 150n^7 + 335n^6 + 380n^5 + 281n^4 + 140n^3 + 47nn + 10n + 1;$$

lesquelles ensuite se reduisent à celles - cy:

$$n^{11} + 4n^{10} + n^9 - 18n^8 - 48n^7 - 77n^6 - 90n^5 - 77n^4 - 49n^3 - 23nn - 7n - 1 \propto 0,$$

$$n^{13} + 9n^{12} + 32n^{11} + 54n^{10} + 31n^9 - 55n^8 - 170n^7 - 256n^6 - 263n^5 - 193n^4 - 102n^3 - 38nn - 9n - 1 \propto 0,$$

$$n^{14} + 10n^{13} + 47n^{12} + 130n^{11} + 221n^{10} + 220n^9 + 75n^8 - 150n^7 - 335n^6 - 380n^5 - 281n^4 - 140n^3 - 47nn - 10n - 1 \propto 0;$$

où l'inconnuë n nous marque la raison d'entre les forces des deux jouëurs. Celuy qui aura le loisir, pourra chercher les racines de ces équa-

Equations; je conjecture, qu'elles sont environ $2\frac{7}{10}$, $1\frac{6}{10}$, & $1\frac{1}{10}$, tellement que celui qui peut donner demi-45, doit gagner 27: qui peut donner demi-30, doit gagner 16: & enfin qui peut donner demi-15, doit gagner 11 coups contre dix coups de sa Partie.

Avant que de finir cet article, je dois encore remarquer, que si l'avantage qu'on donne alternativement au joueur B, est tel, comme je l'ai dit, c'est à dire que les deux joueurs fassent par là à chaque jeu un échange continuel de leurs espérances, la Partie sera toujours égale, non seulement quand on la joue à un ou plusieurs couples de jeux, comme l'on pourroit s'imaginer, mais aussi à quel nombre de jeux, qu'on voudra la jouer. Car posé qu'on joue à 3, 4 ou 5 jeux, que A donne à B un avantage alternativement plus petit & plus grand: savoir le plus petit, quand la somme des jeux qui leur restent est un nombre pair, & le plus grand quand cette somme est un nombre impair; & qu'au premier cas il y ait deux fois plus d'apparence que A gagne le jeu, & qu'à l'autre il y ait au contraire deux fois plus d'apparence que B le gagne: on trouvera le sort de chacun à chaque jeu par ordre, comme l'on voit ici. (Tab. VI.) Les petits ronds vous marquent les jeux qui leur restent à faire; & il paroît, que quand le nombre de ces jeux est égal de part & d'autre, le sort de chaque joueur est toujours $\frac{1}{2} P$.

IX. A donne à B demi-30, & à C 45; combien B peut-il donner à C? *Resp.* Parce que la force de B est à celle d'A, comme 10 à 16, par l'article précédent; & celle d'A à celle de C, comme 42 à 10, par l'art. 7. on doit conclure *ex equo perturbatè*, que la force de B est à celle de C, comme 42 à 16, ou à peu près comme 26 à 10; de sorte que B pourra donner à C demi-45, par l'art. précéd.

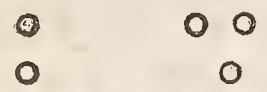
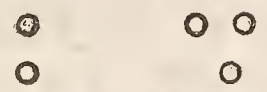


















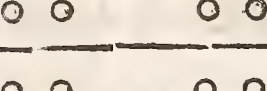
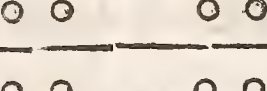
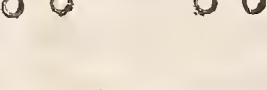
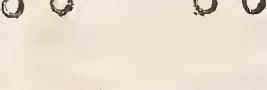
X. A donne à B demi-30, & B à C demi-45; que peut donc A donner à C? *Resp.* la force d'A étant à celle de B, comme 16 à 10: & celle de B à celle de C, comme 27 à 10, par l'article 8; il s'ensuit par la composition des raisons, que la force d'A est à celle de C, comme 432 à 100, c'est à dire que celui-là peut donner à celui-cy quarante-cinq, par l'art. 7.

XI. A est deux fois plus fort que B, & cinq fois plus fort que C. Donc B est $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C, & lui peut donner par conséquent presque demi-45, par l'art. 8.

Table VI.

Jeux qui restent		Somme de ces jeux	Sort de A
A	B		
○ ○	○ ○	Pair	$\frac{1}{2}$
○ ○	○ ○	Impair	$\frac{1 \cdot 1:2 + 2 \cdot 0}{3} \infty \frac{1}{6}$
○ ○ ○	○ ○	P	$\frac{2 \cdot 1:6 + 1 \cdot 0}{3} \infty \frac{1}{9}$
○ ○ ○ ○	○ ○	I	$\frac{1 \cdot 1:9 + 2 \cdot 0}{3} \infty \frac{1}{27}$
○ ○ ○ ○ ○	○ ○	P	$\frac{2 \cdot 1:27 + 1 \cdot 0}{3} \infty \frac{2}{81}$
○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 1:1 + 2 \cdot 1:2}{3} \infty \frac{2}{3}$
○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2:3}{3} \infty \frac{8}{9}$
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 8:9}{3} \infty \frac{25}{27}$
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 25:27}{3} \infty \frac{79}{81}$
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 1:2 + 2 \cdot 1:9}{3} \infty \frac{13}{54}$
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	P	$\frac{2 \cdot 13:54 + 1 \cdot 1:27}{3} \infty \frac{14}{81}$
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	I	$\frac{1 \cdot 14:81 + 2 \cdot 2:81}{3} \infty \frac{2}{27}$

Jeux

Jeux qui restent		Somme de ces jeux	Sort de A.
A	B		
		I	$\frac{1. 8:9 + 2. 1:2}{3} \infty \frac{17}{27}$
		P	$\frac{2. 25:27 + 1. 17:27}{3} \infty \frac{67}{81}$
		I	$\frac{1. 79:81 + 2. 67:81}{3} \infty \frac{71}{81}$
		P	$\frac{2. 17:27 + 1. 13:54}{3} \infty \frac{1}{2}$
		I	$\frac{1. 1:2 + 2. 14:81}{3} \infty \frac{137}{486}$
		P	$\frac{2. 137:486 + 1. 2:27}{3} \infty \frac{155}{729}$
		I	$\frac{1. 67:81 + 2. 1:2}{3} \infty \frac{148}{243}$
		P	$\frac{2. 71:81 + 1. 148:243}{3} \infty \frac{574}{729}$
		P	$\frac{2. 148:243 + 1. 137:486}{3} \infty \frac{1}{2}$
		I	$\frac{1. 1:2 + 2. 155:729}{3} \infty \frac{1349}{4374}$
		I	$\frac{1. 574:729 + 2. 1:2}{3} \infty \frac{1303}{2187}$
		P	$\frac{2. 1303:2187 + 1. 1349:4374}{3} \infty \frac{1}{2}$

XII. A est $\frac{3}{2}$ fois plus fort que B, & B $\frac{5}{2}$ fois plus fort que C. Donc A est $\frac{15}{4}$ fois plus fort que C, & ainsi lui pourra donner plus de demi-45, & moins de 45.

XIII. Connoissant les raisons d'entre les forces de trois Joueurs A, B, C, jöians un à un en tous sens, on connoitra aussi le raport de leurs forces, quand deux de ces joueurs jöient de compagnie contre le troisieme. Suposons, que les forces absoluës des trois joueurs soient marquées par les lettres l, m, n ; que A jouë contre les deux autres, & qu'il jouë indifféremment tantôt à B, tantôt à C: S'il jouë à B, il a l degrés de facilité de gagner le coup. & m degrés de le perdre; ce qui luy vaut $\frac{l}{l+m}$: & s'il jouë à C, il a encore l degrés d'aparence de gagner le coup, & n degrés de le perdre; ce qui fait $\frac{l}{l+n}$. Donc s'il est également possible, qu'il envoie la balle à B ou à C, comme nous suposons, il y a un cas, qui luy fait avoir $\frac{l}{l+m}$, & un autre, qui luy fait acquerir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy donne par rapport à ce coup-là, $\frac{1 \cdot \frac{l}{l+m} + 1 \cdot \frac{l}{l+n}}{2} \propto \frac{l}{2l+m+n}$ + $\frac{l}{2l+2n} \propto \frac{2l+l m+l n}{2l+2l m+2l n+2m n}$, tellement qu'il reste pour le fort des autres B & C, $\frac{l m+l n+2 m n}{2l+2l m+2l n+2 m n}$. Ainsi leurs forces étant par exemple en raison de 3, 2, 1, le fort d'A est $\frac{27}{40}$, & celuy des B & C $\frac{13}{40}$, c'est à dire que A peut gagner 27 coups, lorsque les autres n'en peuvent gagner que 13; de sorte qu'il leur peut donner trente avec quelque avantage pour soi, comme il paroît par la cinquieme Table. Que si vous faites $\frac{2l+l m+l n}{2l+2l m+2l n+2 m n} \propto \frac{l m+l n+2 m n}{2l+2l m+2l n+2 m n}$, vous aurez $l \propto m n$; ce qui vous marque, que quand la force absoluë de celui, qui jouë contre les deux autres, est moienne proportionnelle entre les forces de ceux-cy, la Partie se peut jouer à but.

Quand nous avançons, comme également probable, que le joueur A envoie la balle à B ou à C, ce n'est qu'une suposition, & la verité est, que plus le joueur est habile, plus souvent il enverra la balle

la balle au plus foible. Pour avoir égard à cela, suposez que toutes les fois qu'il jouë p balles au plus fort B, il en jouë un plus grand nombre q au plus foible C: donc il y a p cas, qui luy font avoir $\frac{l}{l+m}$, & q cas qui luy font obtenir $\frac{l}{l+n}$; ce qui luy vaut $p \cdot \frac{l:l+m}{p+q} + q \cdot \frac{l:l+n}{p+q} \infty$

$$\frac{pl}{p+q \cdot l+m} + \frac{ql}{p+q \cdot l+n} \infty \frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn} :$$

où si vous interpretez les lettres l, m, n , par 3, 2, 1, comme auparavant, & outre cela p par 1, & q par 3, vous trouverez le sort d'A à l'égard de chaque coup $\infty \frac{57}{80}$, plus grand que $\frac{27}{40}$ le sort qu'il a, lors qu'il envoie les balles indifféremment à chacun des autres; en sorte qu'il leur peut maintenant donner presque demi-45. Si vous faites

$$\frac{pll+qll+qlm+pln}{pll+qll+plm+qlm+pln+qln+pmn+qmn} \infty \frac{1}{2},$$

vous aurez $plm - pln + pmn - pll \infty qlm - qln - qmn + qll$; ce qui marque, que la Partie à but sera égale, quand p est à q , comme $lm - ln - mn + ll$ à $lm - ln + mn - ll$; & il faut pour cet effet, que mn soit toujours plus grande que ll .

Maïs l'on doit encore ici considérer une chose, qui contrebalance en quelque manière l'avantage, que tire le joueur A de ce qu'il jouë le plus souvent au plus foible. C'est qu'étant seul contre deux, il se fatigue aussi plus que chacun des autres, & que cette fatigue semble diminuer considérablement sa force & son sort: car trois personnes d'une égale force joüans ensemble, un contre deux, on voit bien, que selon ce calcul, la Partie devoit être égale, au lieu qu'il est plus probable, que les deux la gagneront contre le troisième, vû qu'ils ne se lassent pas tant, & qu'ils ne défendent chacun que la moitié du Jeu de Paume. Pour avoir donc égard à cette différence, il faudroit juger des forces absolües de nos joueurs par le nombre des coups, qu'ils gagnent ou qu'ils perdent, non quand ils joüent chacun seul contre A, mais quand ils joüent conjointement contre luy: car ayant observé par exemple, que de tous les coups, qui se joüent entre A & B, le nombre de ceux que A gagne est au nombre de ceux que gagne B, comme l à r ; & que de tous les coups qui se joüent

entre A & C, le nombre de ceux que A gagne est au nombre de ceux que gagne C, comme l à s ; il est clair, que les forces absolües des trois jöueurs A, B, C seront alors en raison de l, r, s ; d'oü leurs forts se déduisent ensuite comme dessus, en sorte qu'on n'a qu'à substituer simplement les lettres r & s à la place de m & n .

XIV. Connoissant les raisons des forces de quatre jöueurs A, B, C, D, jöüans un à un en tous sens, on connoitra le raport de leurs forces, quand ils jöüent deux à deux, A & B contre C & D. Supposons que leurs forces absolües soient exprimées par k, l, m, n ; il se peut faire, que A (de même que B) jöüé à C ou à D. Si A jöüé à C, il a $\frac{k}{k+m}$; & s'il jöüé à D, il a $\frac{k}{k+n}$ vraisemblances de gagner le coup; c'est-ce qui le fait parvenir au fort

$$\frac{1 \cdot k : k+m + 1 \cdot k : k+n}{2} \propto \frac{2kk + km + kn}{2kk + 2km + 2kn + 2mn} \cdot \text{Par la même}$$

$$\text{raison si c'est B qui jöüé, son fort est } \frac{1 \cdot l : l+m + 1 \cdot l : l+n}{2} \propto$$

$$\frac{2ll + lm + ln}{2ll + 2lm + 2ln + 2mn} \cdot \text{Or il est également possible, que A ou B}$$

jöüe: donc il y a un cas, qui leur apporte $\frac{2kk + km + kn}{2kk + 2km + 2kn + 2mn}$,

& un autre, qui leur donne $\frac{2ll + lm + ln}{2ll + 2lm + 2ln + 2mn}$; ce qui leur

$$\text{vaut } \frac{2kk + km + kn}{4kk + 4km + 4kn + 4mn} + \frac{2ll + lm + ln}{4ll + 4lm + 4ln + 4mn} \cdot \text{Ainsi les for-}$$

ces absolües des quatre jöueurs A, B, C, D, étant comme 1, 5, 2, 3, le fort d'A & B par raport à chaque coup sera $\frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 7 \cdot 2}$, & celui de C & D $\frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 2}$; si bien que ceux-cy peuvent donner à ceux-là presque demi-quinze. Si dans les dénominateurs de ces fractions literales vous mettez $4kl$ au lieu de $4mn$, vous aurez

$$\frac{2kk + km + kn}{4kk + 4km + 4kn + 4kl} + \frac{2ll + lm + ln}{4ll + 4lm + 4ln + 4kl} \propto \frac{2k + m + n}{4k + 4m + 4n + 4l}$$

$$+ \frac{2l + m + n}{4l + 4m + 4n + 4k} \propto \frac{2k + 2l + 2m + 2n}{4k + 4l + 4m + 4n} \propto \frac{1}{2}; \text{ ce qui montre,}$$

que si les forces des jöueurs d'un côté & d'autre se trouvent reciproquement proportionnelles, la Partie qu'ils jöüent à but sera égale. Toutes fois il faut ici repeter l'avertissement du précédent article, sçavoir

ſçavoir que les habiles ioüeurs tâchent toujours d'envoyer les balles au plus foible, à quoi il faut avoir égard, ſi l'on y veut aller bien juſte.

XV. Si de deux jouëurs A & B l'un peut donner à l'autre un avantage de quelques coups, & qu'il aime mieux luy donner cet avantage en jeux entiers qu'en points; on veut ſçavoir, combien de jeux il luy doit donner? Par exemple, ſi A peut donner à B 45, & qu'il veüille joüer à but avec luy on demande, de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reſerve d'un ſeul? Pour réſoudre cette queſtion, il faut conſidérer, que 1. A pouvant donner à B 45, la valeur de ſa force, marquée par la lettre n , fera $\frac{45 \cdot 16}{1000}$ par l'art. 7^{me}.
2. Quand il eſt à but avec B, l'eſpérance qu'il a de gagner le jeu eſt

par la 4^{me} Table,
$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$$
; par conſéquent celle de B eſt

$$\frac{15n^3 + 11nn + 5n + 1}{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$$
; & la raiſon de leurs eſpérances
$$\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1}$$
.

3. Pour expliquer cette raiſon par nombres, en y ſubſtituant $\frac{45 \cdot 16}{1000}$ à la place de n , on peut ſe ſervir des Logarithmes, par le moien deſquels on la détermine ſans peine à $\frac{7113529}{134167}$.

Nommons cette raiſon m , & cherchons ſucceſſivement, quel eſt le fort de A par raport à la Partie, quand il luy manque 1, 2, 3, 4 &c. jeux, pendant qu'à B il n'en manque toujours qu'un; juſqu'à ce que nous voïons par la progreſſion, quel doit être ce fort, lors qu'il luy manque x jeux. Or ſ'il luy manque un jeu, de même qu'à B, c'eſt à dire ſi les deux joüeurs ſont à deux de jeux, il eſt aiſé de juger par ce que j'ay démontré dans l'art. 4,

que le fort de A eſt $\frac{m m}{m m + 1}$. S'il luy manque deux jeux, il eſt clair

qu'il y a m cas, qui le pourront mettre à deux de jeu avec B en luy faiſant gagner le jeu, & un cas qui luy fait perdre le jeu & la Partie;

ce qui luy vaut $m \frac{m m : m m + 1 + 1}{m + 1} \propto \frac{m^3}{m m + 1 \cdot m + 1}$. S'il luy

manque trois jeux, il n'eſt pas moins clair, que m cas luy en feront reſter deux en luy faiſant gagner le jeu, & qu'un cas luy fera encore

perdre

$$Lm \infty L \frac{7114529}{134167} \infty 1.7245005; Lm+1 \infty L \frac{7248696}{134167} \infty 1.7326142,$$

2,

$$Lmm \infty 2Lm \quad \infty 3.4490010 \qquad Lmm+1 \infty 3.4491555.$$

$Lm+1$	$\infty 1.7326142$
Lm	$\infty 1.7245005$
$L2$	$\infty 0.3010300$
$Lm+1+Lm+L2$	$\infty 3.7581447$
$Lmm+1$	$\infty 3.4491555$
$Lm+1+Lm+L2-Lmm+1$	$\infty 0.3089892$	
$Lm+1-Lm$	$\infty 0.0081137$

81137) 3089892 (38 ∞ x.
243411
 655782
649096
 6686

XVI. Le Joueur A pouvant donner à B 45, l'on demande de combien de jeux il les luy peut donner tous à la reserve d'un seul, si outre les jeux entiers qu'il luy donne, il luy veut encore donner 15 ou 30 à chaque jeu? Pour satisfaire à la question, vous n'avez qu'à mettre $\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 5n^4}{10n^4 + 15n^3 + 11nn + 5n + 1}$ & puis $\frac{n^6 + 4n^5 + n^4}{6n^4 + 8n^3 + 7nn + 4n + 1}$ (raisons des espérances, qu'on leur trouve par la 4^{me} Table, lorsque B a 15 ou 30 à rien) à la place de $\frac{n^7 + 5n^6 + 11n^5 + 15n^4}{15n^3 + 11nn + 5n + 1}$ (raison des espérances qu'ils obtiennent quand ils joüent à but), en y interprétant encore n par $\frac{4215}{1000}$: ce qui vous fera trouver $m \infty \frac{6728520}{450105}$, & puis $m \infty \frac{1125263}{263741}$; d'où le reste se déduit comme dessus, & il proviendra à peu près $x \infty 12$, & ensuite $x \infty 4$; de sorte que A peut donner à B 11 jeux de 12, & encore 15 points en chaque jeu; ou bien 3 jeux de 4 & encore 30 points en chacun.

XVII. Si A peut donner à B 30, & qu'on demande combien de jeux entiers il luy peut donner; il faut seulement changer la valeur de n , qui marque sa force, en $\frac{1246}{1500}$ par l'art. 7^{me}, & faire ensuite comme dessus, pour trouver celle de x . Le calcul nous apprend, qu'il peut luy donner environ de cinq jeux quatre, & joüer à but; ou deux jeux de trois, & encore 15 points en chaque jeu. Si A ne peut donner à B que 15, la valeur de n sera censée $\frac{1313}{1000}$ par l'art. 7. & l'on

4 trouvera

trouvera qu'il ne fauroit luy donner qu'un jeu de deux, s'il prétend de joüer à but avec luy.

XVIII. On peut former plusieurs questions sur les Bisques, qui sont des coups d'avance donnés par l'une des parties à l'autre, qui en profite quand bon luy semble; & demander par exemple: si dans un cas donné il est plus avantageux de prendre sa bique, ou de ne la pas prendre? si deux bisques en quatre jeux valent mieux que demi-quinze: ou quinze & deux bisques mieux que demi-trente? & autres semblables. Mais comme ces questions nous meneroient trop loin, je ne veux pas les toutes entreprendre: je me contenterai seulement de m'arrêter un peu sur la première. Suposons, que les joueürs ne jouënt qu'à un jeu: que la force de A soit à celle de B en raison d'égalité ou d'inégalité quelconque, n à 1: & que B donne à A bique (car bien que cela ne se pratique pas, quand on sçait que les joueürs sont égaux: il arrive souvant, que B ne connoit pas les forces d'A, celui-cy ayant dissimulé auparavant son jeu; ou que A la demande par opiniâtreté, ou parce qu'il a perdu le jeu précédent qu'il jouoit à but, quoy qu'on sache d'ailleurs qu'ils sont égaux) puis suposons, qu'ils soient à deux & que A n'ait pas encore pris sa bique; l'on demande, quelle est son espérance de gagner le jeu? & s'il fait mieux de prendre sa bique, ou de la garder plus long temps? Sur quoi je fais ce raisonnement: S'il prend sa bique, il gagne l'avantage, mais il n'aura plus de bique: par conséquent son fort sera par la Table IV $\frac{n^3 + nn + n}{n^3 + nn + n + 1}$; s'il ne prend pas sa bique, il se peut faire qu'il gagne ou perde le coup prochain: s'il le gagne, il a gagné le jeu; car ayant l'avantage il ne manquera pas de prendre après sa bique: mais s'il perd le coup, il aura bien encore sa bique, mais B aura l'avantage; & puisque le fort d'A en cette rencontre à cause de la bique m'est encore inconnu, je l'appelle y . Y ayant donc par l'hipotêse n cas qui luy font gagner le coup, & un cas qui le luy fait perdre, le fort qu'il obtient quand il ne prend pas la bique sera $\frac{n \cdot 1 + 1 \cdot y}{n + 1} \propto \frac{n + y}{n + 1}$. Or, par le privilège des bisques, A est également en pouvoir de prendre sa bique ou de ne la pas

la pas prendre; c'est à dire, il peut également acquérir $\frac{n^3 + nn + n}{n^3 + nn + n + 1}$ ou $\frac{n+y}{n+1}$: c'est pourquoi si le fort, qui luy convient pendant cette

indifférence, est appellé x , il y aura $x \propto \frac{n^3 + nn + n}{2n^3 + 2nn + 2n + 2} + \frac{n+y}{2n+2}$.

Pour chercher le fort y , il faut faire un semblable raisonnement: Si A prend sa bisque, il remet le jeu à deux, & n'aura plus de bisque; c'est - ce qui luy donne par la Table IV $\frac{nn}{nn+1}$. S'il ne prend pas la bisque, & qu'il gagne le coup, il gagne le fort x (parce qu'il sera à deux, & aura encore sa bisque); mais s'il le perd il perd ensemble le

jeu; c'est ce qui luy vaut alors $\frac{n \cdot x + 1 \cdot 0}{n+1} \propto \frac{nx}{n+1}$. Or A est également en droit de prendre sa bisque ou de ne la pas prendre, c'est à dire d'acquérir $\frac{nn}{nn+1}$ ou $\frac{nx}{n+1}$; c'est pourquoi son fort pendant cette indifférence, que nous appellons y , sera $\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2}$. Mettant donc

cette valeur de y dans l'équation $x \propto \frac{n^3 + nn + n}{2n^3 + 2nn + 2n + 2} + \frac{n+y}{2n+2}$,

nous trouverons $x \propto \frac{4n^4 + 7n^3 + 7nn + 4n}{4n^4 + 7n^3 + 8nn + 7n + 4} \propto$

$\frac{n+1 \cdot 4n^3 + 3nn + 4n}{nn+1 \cdot 4nn+7n+4}$; & puis substituant reciproquement celle-

cy nous aurons $y \left(\frac{nn}{2nn+2} + \frac{nx}{2n+2} \right) \propto \frac{nn \cdot 4nn + 5n + 4}{nn+1 \cdot 4nn+7n+4}$.

Ainsi le jeu étant à deux, il se présentent trois quantitez,

$\frac{n^3 + nn + n}{n^3 + nn + n + 1}$ $\left(\frac{n^3 + nn + n}{nn+1 \cdot n+1} \right)$, $\frac{n+y}{n+1}$ & $\frac{n+1 \cdot 4n^3 + 3nn + 4n}{nn+1 \cdot 4nn+7n+4}$,

qui marquent le fort de A dans trois différentes hipotéses: l'une, quand il prend sa bisque: l'autre, quand il ne la prend pas: & la troisième (qui doit être moienne entre les deux autres), quand il est encore dans l'indifférence de la prendre ou de ne la prendre pas. Et parce que la première après la réduction à un même dénominateur se trouve plus grande que la troisième, il s'ensuit qu'à plus forte rai-

fon elle fera plus grande que la seconde, & que par conséquent A fait mieux de prendre sa bisque, que de la garder pour une autre fois.

Si l'on examine ces trois autres quantitez $\frac{nn}{nn+1}$, $\frac{nx}{n+1}$, &

$\frac{nn \cdot 4nn + 5n + 4}{nn + 1 \cdot 4nn + 7n + 4}$, que nous avons trouvées par la même opération, & qui marquent le sort de A dans les dites hipotéses, quand B a l'avantage, ou (ce qui est autant) quand il a 45 à 30, l'on peut remarquer, que la première est aussi plus grande que les deux autres; de sorte qu'en cet état A fait encore mieux de prendre sa bisque.

Vous trouverez enfin avec ces raisonnemens les sorts du joueur A, pour toutes les autres constitutions du jeu, lorsque B a 45 à 15, ou 45 à rien, ou 30 à 15 &c. & même avec moins de peine, si vous y allez par ordre; car vous ne rencontrerez plus dans votre opération que des sorts déjà trouvés & connus. Je me contente de vous les donner pour des joüeurs égaux dans les trois colonnes marquées I. II. III. de la Table septième: la première considère le joueur A, comme prenant sa bisque; la troisième, comme ne la prenant pas; & celle du milieu, comme ne s'étant pas encore déterminé s'il la prendra ou non: & l'on remarque par tout, que les fractions de la première colonne sont un peu plus grandes que celles des autres; d'où l'on peut généralement conclure, qu'il est toujours plut avantageux pour A de prendre d'abord sa bisque, que de la garder plus long temps.

XIX. Le calcul du précédent article suppose le joüeur A dans une parfaite indifférence au regard de sa bisque, qui luy donne toujours un panchant égal de la prendre ou de ne la prendre pas: cependant il faut remarquer, que quoi qu'il soit également en pouvoir de la prendre à chaque coup, il n'est pas toujours également probable qu'il la prenne; y ayant des endroits, où il peut la faire mieux valoir qu'en d'autres; si ce n'est peut-être quand on joüe sans faire des chasses, auquel cas je ne vois aucune raison, pourquoi il faudroit diférer la bisque d'un seul coup: mais faisant des chasses, il y a des rencontres, où on la peut employer si utilement, qu'elle sert
presque

Table VII.

NB. A & B sont des joüeurs égaux :

A a une bisque à prendre .

Points de		Sorts de A			col. de	Points de		Sorts de A			col. des
A	B	I.	II.	III.	chass.	A	B	I.	II.	III.	chass.
45	45	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{19}{15}$	30	15	$\frac{7}{8}$	$\frac{209}{240}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{17}{15}$
30	45	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{15}{7}$	15	15	$\frac{11}{16}$	$\frac{219}{320}$	$\frac{109}{160}$	$\frac{47}{44}$
15	45	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{11}{11}$	0	15	$\frac{1}{2}$	$\frac{319}{640}$	$\frac{159}{320}$	$\frac{61}{59}$
0	45	$\frac{1}{8}$	$\frac{29}{240}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{15}{13}$	30	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{899}{960}$	$\frac{449}{480}$	$\frac{16}{15}$
30	30	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{43}{60}$	$\frac{19}{15}$	15	0	$\frac{13}{16}$	$\frac{779}{960}$	$\frac{389}{480}$	$\frac{123}{119}$
15	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{59}{120}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{7}{8}$	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{1007}{1536}$	$\frac{503}{768}$	$\frac{303}{298}$
0	30	$\frac{5}{16}$	$\frac{99}{320}$	$\frac{49}{160}$	$\frac{43}{43}$						

presque de trente ; car y ayant une chasse difficile à gagner pour A, elle est autant que perduë pour luy ; prenant donc sa bisque, il empêche non seulement sa Partie de gagner 15, mais il les gagne luy-même, ce qui luy vaut 30. Comme donc la détermination du sort des joüeurs, qui demande la considération des bisques, dépend de la constitution particulière du jeu, de la diversité des chasses, & même du caprice des joüeurs, qui n'observent point de regles, il est difficile d'en former des conjectures bien sûres. Voici pourtant la manière, dont je voudrois m'y prendre, s'il falloit encore avoir égard aux chasses : Posé que les joüeurs soient trentains ou à deux, & qu'il y ait une chasse plus difficile à gagner à l'un qu'à l'autre (le nombre des fois, qu'on en a vû gagner une semblable au joüeur A, étant au nombre des fois, qu'on en a vû gagner à B, en raison d'inégalité quelconque de m à 1) bien que les deux joüeurs soient d'ailleurs égaux ; je considère, que si le joüeur A gagne la chasse sans prendre sa bisque, il gagne le jeu, car il ne manquera pas de la prendre après : & s'il perd la chasse, B aura l'avantage, mais A retiendra sa bisque, qui luy vaut, par la II^{me} colonne de la VII^{me} Table, $\frac{13}{15}$. Parce donc que par l'hipotêse ce joüeur a m degrez de facilité de gagner la chasse contre un degre de la perdre, le sort, qu'il possède quand il

d 3 ne prend

ne prend pas sa bisque, sera $\frac{m \cdot 1 + 1 \cdot 13 : 30}{m + 1} \propto \frac{30m + 13}{30m + 30}$. Mais si au contraire il prend cette bisque, la chasse est morte, & son sort se trouve, par la I. colonne de la dite Table, $\frac{3}{4}$. Je n'ay donc qu'à chercher, laquelle des deux fractions, ou de $\frac{30m + 13}{30m + 30}$ où de $\frac{3}{4}$, surpasse l'autre; en faisant sur elles les mêmes opérations, que s'il y avoit égalité entre elles; jusqu'à ce que m demeure seule d'un côté: moiennant quoi je trouve, que le joueur A fait mieux tantôt de garder, tantôt de prendre sa bisque, suivant que m est plus grande ou plus petite que $\frac{12}{5}$; & qu'il luy doit être indifférent de la prendre ou de la garder, si m est au juste $\propto \frac{12}{5}$. Posé de nouveau, que A ait 30 à 45, ou que B ait l'avantage, & qu'il y ait la même chasse; il est clair, que si A la gagne sans prendre sa bisque, il fera à deux, par conséquent par la II. col. de la VII^{me} Table il aura $\frac{11}{15}$: mais que s'il perd la chasse, il perdra le jeu. Ayant donc m cas de la gagner & un cas de la perdre, il aura (quand il ne prend pas sa bisque) $\frac{m \cdot 11 : 15 + 1 \cdot 0}{m + 1} \propto \frac{11m}{15m + 15}$. Si A veut au contraire prendre la bisque, le jeu se met à deux, & la chasse étant morte le sort de chacun sera $\frac{1}{2}$. Faisant donc comparaison entre $\frac{11m}{15m + 15}$ & $\frac{1}{2}$, nous trouvons, qu'il vaut mieux pour A de garder ou de prendre la bisque, selon que m est plus grande ou plus petite que $\frac{15}{7}$. & que l'un vaut autant que l'autre, si $m \propto \frac{15}{7}$. De ce que je viens de faire voir, nous pouvons encore conclure, que la facilité, qu'a le joueur A de gagner une chasse, étant exprimée par un nombre compris entre $\frac{12}{5}$ & $\frac{15}{7}$, il fera mieux de garder sa bisque, si le jeu est à deux; mais que si B a l'avantage, il feroit mieux de la prendre. Enfin c'est de cette manière, que j'ay déterminé tous les autres nombres de la colonne des chasses de la VII^{me} Table, qui nous peuvent marquer, quand le joueur A doit prendre ou garder sa bisque: car s'il a plus de facilité de gagner quelque chasse, qu'il n'est porté par ces nombres, il fait mieux de garder la bisque; s'il en a moins, il fait mieux de la prendre; & s'il en a tout juste autant, il peut faire sans préjudice ce qu'il veut.

XX. Il me reste encore à parler des *services*, & de l'avantage qu'il y a de les donner. Vous sçavez, que le premier coup de chaque bale, qu'on donne sur le toit, s'appelle *service*. Celuy qui le donne semble avoir quelque avantage par dessus celuy qui le reçoit, pour deux raisons: l'une, parce que le coup de service est un coup seur, qui se donne la bale à la main; au lieu que les coups qui se joient ensuite la bale en l'air sont sujets d'être manqués: l'autre, parce que quand celuy qui sert manque quelque bale, c'est une *chasse*, au lieu que quand l'autre la manque, il perd toujours quinze (du moins si la bale entre dans le jeu; car pour les *chasses de vers le jeu*, je n'en veux pas parler, de peur de me trop étendre, & il me suffit de vous marquer en gros la route, qu'il faut tenir dans cette recherche.) Posons qu'il y ait deux joüeurs A & B, que A donne le service, que contre un coup qu'il a manqué, on ait observé qu'il ait fait p bons coups; & que contre un coup qu'a manqué B, on luy en ait vû faire q de bons: posons encore que dans le temps que c'est à A de joüer, son espérance de gagner la bale soit y , mais que cette espérance devienne z , quand l'autre B doit joüer; & considérons premièrement ce qui seroit de ces espérances, si l'on joüoit sans faire des *chasses*, c'est à dire si la bale qu'on manque étoit toujours perduë pour celuy qui la devoit joüer. Or par ce que nous venons d'établir il est aisé de voir, que si A doit joüer, il y a un cas, qui luy fera perdre la bale, & p cas qui luy faisant reüssir son coup mettront B dans la necessité de joüer, & changeront ainsi le sort y du joüeur A en celuy de z . Si c'est au contraire B qui joüe à son tour, il y a un cas qui fera gagner la bale à A (en la faisant perdre à B) & q cas qui remettront le joüeur A dans la necessité de joüer, & luy ramèneront le sort y .

Donc nous aurons d'un côté $y \propto \frac{1 + p \cdot z}{1 + p}$ de l'autre $z \propto \frac{1 + q \cdot y}{1 + q}$, c'est à dire, mettant à la place de y sa valeur trouvée $\frac{p \cdot z}{1 + p}$, $z \propto \frac{1 + p + p q z}{1 + p + q + p q}$; d'où l'on tire $z \propto \frac{1 + p}{1 + p + q}$. Or parce que le joüeur A ne sauroit manquer

son

son coup de service, il s'ensuit qu'il ne faut pas conter ce coup, & s'imaginer quand il le jouë, comme si c'étoit à B de jouer : donc l'espérance qu'il a de gagner la bale sera censée alors $\frac{1+p}{1+p+q}$ par conséquent celle de B $\frac{q}{1+p+q}$, & la raison de ces espérances 1 + p à q.

D'où il paroît, que si les deux joueurs sont égaux, & que chacun puisse fraper par ex. dix bons coups contre un qui ne vaut rien, les lettres p & q valant chacune 10, l'avantage de celui qui donne le service sur celui qui le reçoit est comme de 11 sur 10; mais que cet avantage augmente à mesure que les joueurs sont plus foibles, & qu'il diminue jusques à s'anéantir entièrement, à mesure qu'ils se trouvent plus habiles.

XXI. Joignons y maintenant la considération des chasses, mais sans nous embarasser de leur inégalité, en nous imaginant, comme si elles étoient toutes dessous la corde; c'est à dire, come si toutes les bales qui passent la corde, pouvoient les gagner. Vous sçavez que quand il y a chasse, les joueurs font un échange de leurs places, & passant chacun de l'autre côté du jeu, celui qui a donné les services, est obligé de les prendre après. Que ces quatre lettres v, x, y, z, marquent donc l'espérance d'A en quatre différens états; sçavoir, les deux premières v & x, avant qu'il y ait chasse; les autres y & z après la chasse, quand les joueurs ont passé: la première v & troisième y, quand c'est à A de jouer; & la seconde x & 4^{me} z, quand l'autre B doit jouer. Cela posé, & le raisonnement du précédent article compris, vous comprendrez aussi sans peine la raison des quatre égalitez suivantes, sans qu'il soit besoin d'alonger d'avantage ce

$$\text{discours: } v \propto \frac{1 \cdot y + p \cdot x}{1 + p} \propto \frac{y + px}{1 + p}, \quad x \propto \frac{1 \cdot 1 + q \cdot v}{1 + q} \propto \frac{1 + qv}{1 + q},$$

$$y \propto \frac{1 \cdot 0 + p \cdot z}{1 + p} \propto \frac{pz}{1 + p}, \quad z \propto \frac{1 \cdot 1 + q \cdot y}{1 + q} \propto \frac{1 + qy}{1 + q}.$$

Chassez de l'égalité x la lettre v, & de l'égalité y la lettre z, vous aurez $x \propto \frac{1 + p + qy + pqx}{1 + p \cdot 1 + q}$, c'est à dire $x \propto \frac{1 + p + qy}{1 + p + q}$; & $y \propto$

$$\frac{p + pqy}{1 + p \cdot 1 + q},$$

$\frac{p + pqy}{1 + p + q}$, c'est à dire $y \propto \frac{p}{1 + p + q}$. Chassés encore y de la

nouvelle égalité x , vous trouverés enfin $x \propto \frac{1 + 2p + q + pp + 2pq}{1 + p + q^2}$,

& son reste à l'unité $1 - x \propto \frac{q + qq}{1 + p + q^2}$. D'où il faut conclur-

re, que l'espérance d'A, dans le temps que B doit recevoir de luy le coup de service, est à celle de B en raison de $1 + 2p + q + pp + 2pq$ à $q + qq$; où vous pouvés remarquer, que p & q étant égales plus on augmente leur valeur, plus cette raison approche de la triple, de sorte que de deux jouëurs, qui jouënt également & parfaitement bien, celui qui sert a environ trois fois plus d'espérance de gagner la bale, que l'autre: mais souvenés vous, que c'est dans la supposition, qu'on ne fasse point de distinction entre les chasses, & qu'on n'admette pas celles, qu'on apelle *de vers le jeu*; car autrement ce double regard diminûroit son avantage de beaucoup.

XXII. Je ne dois pas finir ma Lettre, Monsieur, sans avoir prévenu certains faux raisonnemens, qui pourroient tomber dans l'esprit sur cette matière, de peur qu'ils n'éblouissent par leur éclat trompeur, & ne fassent douter de la solidité des principes cy-dessus établis. Dans l'article septième on a demandé, combien de fois le jouëur A devoit être plus fort que B, pour luy pouvoir donner 45? Quelqu'un auroit pû raisonner là-dessus ainsi: Si B jouïoit contre un troisiéme jouëur C de pareille force que luy, & qu'ils fussent 45 à 0, leurs sorts seroient par la I Table en raison de 15 à 1, c'est à dire que B pourroit gagner le jeu 15 fois, lorsque C ne le feroit qu'une fois. Or A donnant 45 à B la Partie est supposée égale, c'est à dire telle, que quand B gagne 15 fois le jeu A le peut aussi 15 fois. Donc A & C joüans ensemble à but, A le peut gagner 15 fois, là où C ne le peut gagner qu'une fois; & par conséquent A doit être 15 fois plus fort que C, ou (ce qui est autant) que B, qui est d'une même force: au lieu que par nôtre analyse nous avons trouvé, qu'il ne devoit être que $4\frac{1}{5}$ fois plus fort que luy. A quoi je répond, que quand ce raisonnement seroit aussi évident

qu'il

qu' il ne l'est pas, il tire mal de la conclusion ce confectaire qui est faux: *Par conséquent A doit être &c.* A, qui peut donner 45 à B, peut gagner 15 jeux contre un, s'il jouë à but avec luy, je l'accorde, car il en peut bien gagner $\frac{7114529}{134176}$ c'est à dire plus de 50, par le 15^{me} art. mais il ne s'en suit pas de là, qu' il soit 15 fois plus fort, se pouvant faire qu' il gagne 15 jeux, ou même 50 jeux, si vous voulés, contre un, sans qu' il ait gagné plus que 4. ou 5 fois plus de coups; à cause que tous les coups, que gagne B durant chaque jeu qu' il perd, ne sont contés pour rien, lesquels pourtant assemblés feroient peut-être la quatrième Partie des coups d' A. Remarquez donc, qu' il vaut mieux, mesurer les forces des jouëurs par le nombre des coups que chacun gagne, que par celuy des jeux ou des Parties qu' ils font, quand ils jouënt à but.

Dans l'article treizième l' on à recherché, de combien A devoit être censé plus fort, s' il jouïoit contre deux autres B & C, posé que leurs forces absolües fussent en raison de 3 . 2 . 1 ? Il y auroit bien des gens, qui pour répondre à cette question se serviroient de l' analogie tirée du mélange des choses: S' il y avoit par ex. trois sortes de vin, dont le prix fussent en raison de 3 . 2 . 1 , il est certain, qu' ayant mélé les deux plus petits ensemble en égale quantité, le prix du mélé sera de $1\frac{1}{2}$, & par conséquent le prix du meilleur à celuy de l' autre, comme 3 à $1\frac{1}{2}$, ou comme 2 à 1. Tout de même, dis-je, pourroient ils penser, que les deux jouëurs B & C qui jouënt de compagnie contre le troisième A, ne passant que pour un jouëur, leur jeu se mélant quasi, & qu' ainsi la force de A doit aussi être double de celle des deux autres prix ensemble. D' autres raisonneroient peut-être comme cela: Puis que par l' hipotêse A gagne trois coups, là où B n' en gagne que deux, & qu' il en gagne encore trois, là où C n' en fait qu' un; il s' ensuit, qu' il doit gagner six coups, lorsque les deux autres ensemble n' en font que 3 + 1 ∞ 3; & que par conséquent sa force doit encore surpasser au double celle des autres, comme nous avons conclu par le prémier discours: Or cela est contraire au calcul du 13^{me} article, qui nous a fait trouver le sort de A plus que le double de celuy des autres. Je
puis

puis répondre en peu de mots à ce deux raisonnemens : Pour le premier, vous sçavés, que les analogies ne prouvent rien ; & pour l'autre, son paralogisme paroît, en ce qu'on doit raisonnablement supposer, que A jouë autant de fois ou plus souvent au plus foible C qu'à B. & que suivant ce raisonnement il s'en fait tout le contraire ; parce que A jouëroit à B cinq coups, dont il gagneroit trois ; & à C il ne jouëroit que quatre coups, dont il gagneroit encore trois : au lieu que nôtre calcul remplit parfaitement cette condition ; car mettez que A jouë 20 coups à B, il en doit gagner 12 : s'il en jouë donc autant à C, il en doit gagner 15 ; ce qui fait en tout 27, & B & C gagnent les autres 13 : mais s'il jouë trois fois autant, c'est à dire 60 coups, à C, il en doit gagner 45, lesquels joints au 12, qu'il gagne sur B, font 57, & il reste pour B & C les autres 23 ; ce qui est tout à fait conforme à ce que porte le calcul du 13^{me} article.

Je finis, Monsieur, par cette reflexion : c'est qu'il est extrêmement facile de se méprendre dans toutes ses connoissances, si l'on n'y fait pas toujours une sérieuse attention : car les raisonnemens, qu'on fait communément dans le monde, ne sont pas meilleurs, que ceux que je viens de rapporter, mais souvant beaucoup pires : l'on voit tous les jours, que le plus sçavans raisonnent sur de pures analogies ; où s'ils s'imaginent de voir clair dans les choses, ils prennent pour très-évident ce qui ne l'est pas, & dont il n'y a que ceux, à qui l'usage des Mathématiques a éclairé l'esprit, qui soient capables d'en découvrir l'imposture. Je suis &c.



ERRATA.

Pag. 41. lin. 12. 13. 14. dele c^n , quibus contingere possit, ut in nulla m
tesserarum prodeat quod susceptum est; & simili modo colligitur
cusus esse

Pag. 70. lin. 24. in fin. pro in l. 2 n.

Pag. 71. lin. 9. pro bnc^m l. b^nc^m

Pag. 84. lin. pen. pro erit 2^n l. erit $2^n - 1$.

Pag. 92. lin. 2. post constat adde Lemma propositum.

Pag. 93. lin. 14. ab initio pro $\frac{b+a}{r}$ l. $\frac{b+a}{r}$

& in fin. pro $\frac{nq-p-l-i-h-g}{r}$ lege $\frac{nq-p-l-i-h-g}{r}$

Pag. 95. in fin. lin. 4. & init. lin. 5. lege $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, sic e-
tiam in fine lin. 11. & init. lin. 12.

lege $\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \dots n-c+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c-1}$

Pag. 106. lin. 28. pro $\frac{n \cdot 2 \cdot n-3 \cdot n-4 \dots n-c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c-1}$

lege $\frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \dots n-c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c-1}$

Pag. 142. lin. 27. pro $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5}$ l. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 5}$

Pag. 143. lin. 6. pro $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 17}$ l. $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 17}$

Pag. 150. lin. 21. pro extra hanc l. extrahant.

Pag. 178. lin. 1. pro $\frac{2}{969}$ l. $\frac{20}{969}$.

Pag. 198. in medio pro $2n-3$ l. $2n-3:18$.

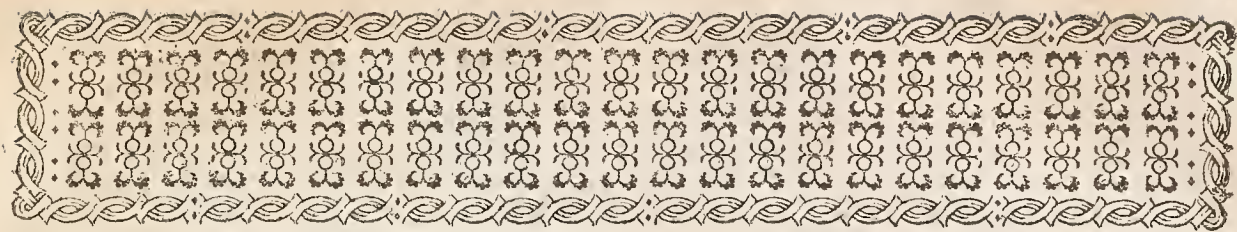
Pag. 203. lin. 5. pro $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} - n \frac{c^n}{a^n}$ l. $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} - n \frac{c^n}{a^n}$

Ead. pag. lin. ult. pro $\frac{b \cdot m \cdot 1 + c \cdot -1}{a}$ l. $\frac{b \cdot m-1 + c \cdot -1}{a}$

Lettre sur les Parties du Jeu de Paume.

Pag. 8. lin. 4. pro $\frac{n^3}{n^3 + nn + n + n + 1}$ l. $\frac{n^3}{n^3 + nn + n + 1}$

Pag. 24. lin. pen. pro $m + 1 \infty \frac{7348696}{124167}$ l. $m + 1 \infty \frac{7248696}{134167}$



ARTIS CONJECTANDI
PARS PRIMA,

Complectens

Tractatum Hugenbergii de Ratiociniis

in Ludo Aleæ,

Cum Annotationibus

JACOBI BERNOULLI.

CHRIST. HUGENII

ad

FRANC. SCHOOTENIUM

Prefatio.



Um in editione elegantissimorum ingenii
Tui monumentorum, quam præ mani-
bus nunc habes, Vir Clarissime, id inter
cætera Te spectare sciam, ut varietate
rerum, quarum tractationem instituisti,
ostendas quàm latè se protendat divina
Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm
proposito Tuo inservire posse, quæ de Aleæ Ratiociniis

A

con-

conscriptimus ; quantò enim minùs rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cùm in Tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, Tuque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis Tuis inventis in lucem exeant, adeò Tibi non refragabor, ut etiam è re meâ esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cùm in re levi ac frivolâ operam collocâsse videri alioqui possem, non tamen prorsùs utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quod Tu veluti inter Tua adoptaveris, nec sine multo labore è vernaculâ linguâ nostrâ in Latinam converteris. Quamquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cæperit, non dubito quin continuò reperturus sit, rem non, ut videtur, ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minùs profundæ indaginis visum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cùm non, sicut illa, in nudâ numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quòd jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hâc in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuère, adeò ut à primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematis pulchrè nobis convenire sæpenumerò expertus sum. Horum Problematum nonnulla

nulla in fine operis addidisse me invenies, omisâ tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluisssem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. *Vale.*



DE RATIOCINIIS

in Ludo Aleæ.



Lusi lusionum, quas sola fors moderatur, incerti solent esse eventûs, attamen in his, quantò quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusbis constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrûm prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc desinire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collutores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpè utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuò ad similem for-

tem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihiq̄ue optionem det ex utrâ manu solidos accipere mâlim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuò eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idq̄ue æquo lusu contendens.

PROPOSITIO I.

SI a vel b expectem, quorum utrumvis æquè faciliè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solum demonstrandam, verum etiam primitus eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x , ac ut victor victo traditurus sit a . Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a , si lusum perdam scilicet; aut $2x - a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a . Quòd si autem $2x - a$ tantundem valeret atque b , æqua mihi fors obtingeret ad a quàm ad b . Pono itaque $2x - a \propto b$, & fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$

possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus a . Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a , si perdam, aut ad obtinendum b , si vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depositum est, alteriq̄ue inde concedo a .

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua fors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim
cum

cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & patet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam; aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

Annotationes.

AUctor hujus Tractatus in fine Proemii sui generaliter, in hâc verò & duabus sequentibus Propositionibus specialius totius Artis fundamentum exponit, quod cum plurimum intersit ut rectè intelligatur, conabor illud alio magis populari & ad cujusque captum accommodato ratiocinio demonstratum dare, hoc tantum posito seu axioma se definitione: quòd *unusquisque tantundem expectet, vel expectare dicendus sit, quantum infallibiliter obtinebit.* Nimirum ad primam Propositionem: Cogitemus, quendam alterâ manu occultasse 3 solidos seu a , alterâ 7 solidos seu b ; alterique mecum permittere, ut unus quod in unâ, alter quod in alterâ manu est, accipiamus: quâ ratione fiet, ut simul ambo infallibiliter consecuturi simus, ac proinde expectare debeamus, id quod in utrâque manu reconditum est, nempe 10 solidos seu $a+b$. Sed concedendum quoque est, utrumque nostrum æquale jus habere in hoc quod expectamus; quare consequitur, expectationem totalem in duas æquas portiones dividendam esse, & cuique tribuendum seorsim dimidium expectationis totalis, id est, 5 seu $\frac{a+b}{2}$.

Coroll. Patet hinc, si in unâ manu occultaverit aliquid seu a , in alterâ nihil, fore cujusque expectationem seorsim illius alicujus dimidium, seu $\frac{1}{2}a$.

Schol. Ex dictis colligi potest, vocabulum *Expectationis* non sumi hîc sensu vulgari, quo communiter expectare vel sperare dicimur quod omnium optimum est, licet nobis pejus accidere possit; sed quatenus spes nostra impetrandi optimum temperata & imminuta est metu consequendi pejus: aded ut per valorem ejus semper significetur intermedii quidpiam inter optimum quod speramus, & pessimum quod metuemus; quod hîc & in sequentibus ubique est intelligendum.

PROPOSITIO II.

SI a , b , vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstima-
 manda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergò me, cum x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x , & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b , & ego ipsi traditurus sim b , si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c , aut ego ipsi sim daturus c , si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione fortem habebò ad obtinendum b , si nimirum primus vincat, aut c , si secundus vincat, aut etiam $3x - b - c$, si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b , & alteri c . Quòd si $3x - b - c$ æquale fuerit ipsi a , eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a , quæ ad b , aut ad c . Pono itaque $3x - b - c \propto a$, & fit $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a , b , c , aut d æqua fors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

Annotat.

Aliter sic demonstrabitur: Fingamus, tres esse loculos, in quorum uno reconditum sit a , in altero b , in tertio c , mihiq; cum duobus aliis potestatem fieri, ut quisque pro se loculum accipiat, fervetq; quod inibi repererit: sic fiet, ut omnes tres accipiamus omnes loculos, habeamusq; quicquid in iis reconditum est, scil. $a + b + c$; unde, cum dici nequeat, unum altero potiore spem vel expectationem habere, consequens est uniuscujusque expectationem seorsim æquivalere tertiæ parti hujus aggregati, vid. $\frac{a+b+c}{3}$. Eodem modo, si

do, si 4 sint loculi, in quibus abscondita sint a, b, c & d , mihi que unus eorum in sortem cedere debeat, censetur mea expectatio æquare 4^{am} partem totius aggregati, sive $\frac{a+b+c+d}{4}$. Sic si 5 sint

loculi, erit mea expectatio $\frac{a+b+c+d+e}{5}$, &c.

Cor. Patet etiam, si in uno pluribusve loculis nihil sit absconditum, quod tum similiter expectatio mea, ejus quod in reliquo vel reliquis continetur, futura sit pars tertia, si loculi sint tres, vel quarta si 4, vel 5^{ta} si 5, &c.

PROPOSITIO III.

SI numerus casuum, quibus mihi eveniet a , sit p ; numerus autem casuum, quibus mihi eveniet b , sit q , fumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cum x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores fumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum deponat quisque x , ita ut depositum sit $px+qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porro cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q , sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b , aut ego contra ipsi idem b , si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p-1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a , & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lulum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationes habere ad b , & $p-1$ expectationes ad a , & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p-1$ lusorum, quæ simul conficiunt $bq+ap-a$. Si itaque $px+qx-bq-ap+a$ æquale esset ipsi a , haberem p expectationes ad a , (quandoquidem jam $p-1$ expecta-

tiones

tiones ad id habebam) & q expectationes ad b , & sic ad priorem meam expectationem rursus pervenissem. Quocirca pono $px + qx - bq - ap + a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap + bq}{p + q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

Annotat.

Aliter ita: Ponamus, tot unà mecum esse collusores, quot sunt in universum casus, nimirum $p + q$, singulisque singulos evenire casus; quod fit, si totidem concipiantur loculi, & in singulis reconditum intelligatur, quantum unoquoque casu acquiritur, videl. in singulis p loculorum a , & in singulis q loculorum b ; singuli jam collusores accipiant singulos loculos, universi ergò accipient omnes, obtinebuntque infallibiliter quicquid in loculis reconditum est, id est, $pa + qb$. Igitur cum omnes expectent æqualiter, distribuendum erit, quod universi accipient, per numerum collusorum seu casuum, sic ut singulorum expectatio fiat $\frac{pa + qb}{p + q}$. Atque eadem ratione ostendetur, si mihi p casibus eveniat a , q casibus b , & r casibus c , sortem meam fore $\frac{pa + qb + rc}{p + q + r}$.

Coroll.

Coroll. 1. Constat hinc primò, si p casibus mihi eveniat a , & q casibus nihil, expectationem meam fore $\frac{pa}{p+q}$.

2. Constat deinde, si numeri casuum recipiant communem divisorem, posse valorem expectationis reduci ad minores terminos; ut, si a obtingat mihi casibus mp , & b casibus mq , fiet expectatio mea juxta regulam $\frac{mpa+mqb}{mp+mq}$, quæ factâ divisione per m æquivalet huic $\frac{pa+qb}{p+q}$.

3. Si habeam p casûs ad obtinendum a , q casûs ad b , & r ad c , tantundem hoc mihi valet, ac si p & q casibus in unum conflatis, haberem $p+q$ casûs ad $\frac{pa+qb}{p+q}$, & r casûs ad c ; quia utroque modo per regulam invenitur fors mea $\frac{pa+qb+rc}{p+q+r}$.

4. Si habeam p casûs ad a , q ad b , & r casûs ad permanendum in eo statu, in quo sum, sive ad retinendam pristinam meam sortem, erit fors ista $\frac{pa+qb}{p+q}$, eadem planè quam haberem, si nullus r casuum adesset. Nam posito x pro valore ejus, habeo per hyp. p casûs ad a , q ad b , & r ad x , quod sortem meam per regulam efficit $\frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$; unde cum hæc mea vocetur x , erit $x \propto \frac{pa+qb+rx}{p+q+r}$, hoc est, factâ multiplicatione, $px+qx+rx \propto pa+qb+rx$, & deleto rx , $px+qx \propto pa+qb$, seu denique $x \propto \frac{pa+qb}{p+q}$.

5. Si habeam p casûs ad obtinendum a (quidpiam cujus ego semissem contuli), & q casûs ad obtinendum nihil, expectatio $\frac{pa}{p+q}$, quæ per Cor. 1. hujus invenitur, totum depositum respicit, & partem significat quæ mihi ex illo debetur, non quantitatem solius lucri vel damni: de hoc enim solo si quæstio sit, considero, quòd dum obtineo depositum a , lucrifacio tantùm $\frac{1}{2}a$; & dum obtineo nihil depositi, perdo $\frac{1}{2}a$, hoc est, acquiro $-\frac{1}{2}a$; unde fors mea hoc sensu accepta fit $\frac{p \cdot a^{a:2} + q \cdot (-a)^{a:2}}{p+q} \propto \frac{p - q \cdot a^{a:2}}{p+q}$, & inveniit lucrum, si p superet q ; damnum, si hæc superet illam.

22

6. Si habeam p casûs ad acquirendum a , & q casûs ad obtinendum b , quorum quidem ego nihil contulero, attamen jactus aleæ mihi redimendus sit pretio n , expectatio mea $\frac{pa+qb}{p+q}$ iterum non tota in lucro ponenda est, sed priùs diminuenda valore n . Etenim cùm alteri do n , & ipse mihi vicissim reddit a vel b , perinde est, ac si ego nihil darem, acciperem verò tantùm $a-n$, vel $b-n$; id quod efficit expectationem meam ita restrictam $\frac{p \cdot a-n + q \cdot b-n}{p+q}$
 $\infty \frac{pa+qb}{p+q} - n$, quæ rursus vel lucrum vel damnum significat, prout pars affirmata præpollet negatæ, aut hæc illi.

Schol. Perspicuum est ex calculi hujus consideratione, magnam illi intercedere affinitatem cum Regulâ Arithm. *Alligationis* dictâ, quâ res diversi pretii in datâ quantitate miscentur, & quæritur pretium rei mixtæ; aut potiùs calculum utrinque planè eundem esse. Sicut enim summa productorum ex quantitibus singularum miscibilium in sua respectivè pretia, divisa per aggregatum omnium miscibilium, exhibet pretium quæsitum, quod semper medium est inter pretia extremorum: ita summa productorum ex numeris casuum in id quod quovis casu acquiritur, divisa per numerum omnium casuum, ostendit valorem expectationis, qui proinde semper intermedius erit inter maximum & minimum quod acquiri potest. Unde si iidem numeri assumantur, ibi pro quantitate miscibilium, eorumque pretiis; hîc pro casibus, & eo quod quovis casu obtinetur; idem quoque numerus denotabit ibi pretium rei mixtæ, & hîc expectationem. Ex. gr. si 3 canthari vini pretii 13 misceantur cum 2 cantharis pretii 8; multiplicatis 3 per 13 & 2 per 8, exurgit pretium omnium cantharorum 55, quo diviso per 5 numerum cantharorum, habetur 11 pretium unius canthari mixti: quanta quoque juxtâ regulam expectatio cujuscumque æstimanda est, qui 3 habuerit casûs ad 13, & 2 ad 8.

P R O P O S I T I O I V.

SUmpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: S ut qui prius ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de quâ certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de faciendâ distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut à facilioribus incipiamus.

Primò considerare oportet lusûs, qui utrobique deficiunt. A Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratia, ut quod depositum est lucretur is, qui prius vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eò casu sortem meam, quantò hîc melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodò lusus sed ipsi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeat, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerum impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur a . Quòd B si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque fors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est, me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per 1^{am} Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquatur alteri meo collusori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius C portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo D tradere debere, ac proinde semper tria contra unum deponere eum E posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquàm alter duos vincat.

Annotat.

- A** *Primò considerare oportet lusûs, qui utrobique deficiunt.]* Adeoque in computandis sortibus solummodò futurorum lusuum, nulla præteritorum habenda est ratio; cum pro unoquoque sequentium lusuum nulla major sit probabilitas, ut fortuna iisdem favere pergat, quibus favit antea, quàm iis qui omnium fuere infortunatissimi: quod observandum contra ridiculam plurimorum opinionem, qui fortunam ut nescio quem habitum considerant, qui aliquandiu in homine permaneat, eique jus quasi tribuat sperandi in posterum similem fortunam.
- B** *Id quod vocetur a.]* Per lit. *a* non solum cum Auctore intelligere possumus depositam pecuniam, quæ inter collusores pro ratione sortium distribui potest; sed etiam in genere omne illud, quòd licet indivisum est in se, concipi tamen potest ut divisibile pro numero casuum, quibus acquiri vel amitti, effici vel non effici potest, ut in ultimâ libri parte fusiùs ostendetur: putà, præmium quodcunque, laureola, victoria, status vel conditio personæ aut rei, munus quoddam publicum, opus quodcunque susceptum, vita vel mors, &c. Ita si duobus maleficis ex speciali gratiâ Principis æquâ sorte de vitâ decertandum sit, utervis eorum habere censebitur per I. Prop. $\frac{1}{2}$ vitæ & $\frac{1}{2}$ mortis, sic ut ejusmodi homo etiam in proprio sensu semi-vivus vel semi-mortuus nuncupari possit.
- C** *Et relinquatur alteri meo collusori $\frac{1}{4} a$.]* Hoc est, residuum totius depositi *a*; quia scil. finito certamine ambo simul infallibiliter habituri sumus integrum *a*: at si fieri quodam casu possit, ut ambo ludentes impetrent plus minùsve integro *a*, evidens est, quòd tunc unius expectatio alterius expectationem nequeat comple-
re ad *a*. Ex. gr. Si duo laqueo digni ludere cogantur tesserâ eâ lege, ut qui pauciora puncta jecerit suspendatur, altero manente vivo; si verò eundem jaciant punctorum numerum, ut ambo vitâ donentur; reperitur pro unius expectatione, ut suo loco patebit, $\frac{7}{12} a$ seu $\frac{7}{12}$ vitæ; unde tamen non sequitur alterius expectationem fore tantum $\frac{5}{12}$ vitæ: cum enim hîc sortes manifestè sint æquales, expectabit & iste $\frac{7}{12}$ vitæ, proinde uterque simul $\frac{7}{6}$ vitæ, hoc est,
plus

plus integrâ vitâ ; quod inde fit, quia nullus quidem casus est, quo non finitâ aleâ unus minimùm superstes maneat, possunt tamen nonnullis casibus ambo vivi superesse.

Quæ ipsius portio statim ab initio &c.] Nempe hâc **D** ratione : Si collusor meus proximum ludum vincat, æquata erit utriusque fors, proinde cedet cuique $\frac{1}{2}a$: sin ego vincam, obtinebit ille nihil. Cùm igitur pari facilitate obtinere possit $\frac{1}{2}a$ vel nihil, expectatio ejus per Coroll. 1. Prop. III. dicenda est $\frac{1}{4}a$.

Ac proinde semper tria contra unum &c.] Ostenden- **E** dum, quòd is qui tres habet casûs ad vincendum, & unum ad perdendum, seu qui tres quartas partes depositi expectat, tria possit deponere contra unum. Hunc in finem solummodò supponi debet, eum trium collusorum vicem sustinere. Etenim si sint 4 collusores, qui æquâ sorte ludant, & quorum singuli deponant 1, expectabit unusquisque id ipsum quod deposuit, hoc est, 4^{ta} partem totius depositi, per Cor. 2. Prop. III. adeoque terni eorum quivis tres quartas partes depositi, & quartus non nisi $\frac{1}{4}$. Sed quia illi tres quoque tria deposuerunt, cùm quartus tantùm deposuerit unum, patet omnino justum esse, ut is, qui cupit in sortem trium succedere, hoc est, triplò plus expectare alio, triplò quoque plus deponat. Aliter ita : Qui tres habet casûs ad vincendum, & unicum ad perdendum, is toties ter vincere potest, quoties alter semel tantùm ; proinde si lusus justus esse debet, oportet ut tribus ille vicibus tantundem lucri reportet, quantum alter unicâ vice ; quod fieri nequit, nisi tria deponat contra unum. Et sic in genere ostendetur, quòd quantò quis altero potiore ad vincendum expectationem habet, tantò etiam plus eum deponere justum sit, si æquâ sorte contendere velint.

PROPOSITIO V.

PONAMUS unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusûs. Oportet hîc facere distributionem.

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a ; quòd si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi

duo lusûs & mihi unus, ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedenti Propositione positus fuit, mihiq̄ue obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum est, per 1^{am} Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita ut mea fors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4^{or} lusûs. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{1}{16}a$ istius quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

Annotat.

Ex progressionem harum fractionum, $\frac{3}{4}a$, $\frac{7}{8}a$, $\frac{1}{16}a$, quæ per præced. & hanc Propositionem inventæ sunt, porrò inferitur, si collusori meo deficient ludi 5, fore sortem meam $\frac{3}{2}a$: si sex, $\frac{6}{4}a$: si septem, $\frac{1}{2}a$; & in genere, si mihi deficiat unus lusûs & collusori meo ludi quotcunque, meam sortem fore ad sortem illius in eâ ratione, quam habet, demtâ unitate, productum binarii toties positi & multiplicati in se, quoties indicat numerus lusuum alteri deficientium, ad unitatem.

PROPOSITIO VI.

PONAMUS mihi deficere duos lusûs & collusori meo tres lusûs.

Fiet itaque primo lusu; vel ut mihi unus lusûs deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique nostrûm adhuc duo lusûs deficient, unde mihi debetur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua fors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{1}{16}a$, per 1^{am} Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

PRO-

PROPOSITIO VII.

POnamus mihi deficere duos lusûs & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi fors obtingat ad $\frac{1}{1} \frac{5}{6} a$ aut $\frac{1}{1} \frac{1}{6} a$, id quod tantum valet ac $\frac{1}{1} \frac{3}{6} a$, per 1^{am} Propositionem. Unde patet, eum F meliorem habere sortem, qui duos lusûs vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4^{am} Propositionem, est $\frac{3}{4} a$, quæ minor est quàm $\frac{1}{1} \frac{3}{6} a$.

Annotat.

Unde patet eum meliorem &c.] Sic adhuc meliorem F sortem habet, qui tres lusûs vincere debet, dum alter sex; reperitur enim ejus portio $\frac{2}{2} \frac{1}{6} a$, major quàm $\frac{1}{1} \frac{3}{6} a$. Ita etiam, qui unum ludum vincere suscipit dum alius quatuor, non parem subit fortunam cum illo, qui duos vincere debet dum alter octo; sed cum illo, qui duos vincere tenetur dum alter sex: quanquam nemo fortassis est, qui sibi non persuaderet, eandem inter sortes rationem obtinere debere, ubi numeri lusuum utrobique deficientium eandem quoque inter se rationem servant; nisi nos calculus aliud docuisset. Quo ipso proin monemur, ut cauti simus in iudicando, nec ratiocinia nostra super quâcunque statim analogiâ in rebus deprehensâ fundare suescamus; quod ipsum tamen etiam ab iis, qui vel maximè sapere videntur, nimis frequenter fieri solet.

Cœterùm lubet hîc Tabulam adjicere pro duobus collusoribus, qualem infra in Propos. IX, pro tribus subjungit Auctor:

Tabu-

Tabula pro 2 colluforibus.

		Eusûs de- ficiens												
		Colluforis												
		B												
		1	2	3	4	5	6	7						
Colluforis A	1	1 : 2	3 :	4	7 :	8	15 :	16	31 :	32	63 :	64	127 :	128
	2	1 : 4	4 :	8	11 :	16	26 :	32	57 :	64	120 :	128	247 :	256
	3	1 : 8	5 :	16	16 :	32	42 :	64	99 :	128	219 :	256	466 :	512
	4	1 : 16	6 :	32	22 :	64	64 :	128	163 :	256	382 :	512	848 :	1024
	5	1 : 32	7 :	64	29 :	128	93 :	256	256 :	512	638 :	1024	1486 :	2048
	6	1 : 64	8 :	128	37 :	256	130 :	512	386 :	1024	1024 :	2048	2510 :	4096
	7	1 : 128	9 :	256	46 :	512	176 :	1024	562 :	2048	1586 :	4096	4096 :	8192
	8	1 : 256	10 :	512	56 :	1024	232 :	2048	794 :	4096	2380 :	8192	6476 :	16384
	9	1 : 512	11 :	1024	67 :	2048	299 :	4096	1093 :	8192	3473 :	16384	9949 :	32768

Tabella hæcce levissimo negotio quousque opus fuerit continuabitur, in supremâ quidem serie transversali per ea quæ ad Propos. 5 annotata sunt; in primâ serie perpendiculari per continuam bisectionem dimidii; in locis intermediis per dimidiationem summæ duarum areolarum immediatè præcedentium in eâdem serie perpendiculari & transversali; cujus constructionis ratio ex dictis plus satis perspicua est. Quomodo autem expectationes duorum ludentium absque continuatione Tabellæ indefinitè ad quotvis deficientes lusûs exhiberi possint, infra in Appendice Cap. 4. Part. II, ostendetur.

PRO-

P R O P O S I T I O V I I I.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusûs.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a . Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideoque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a , una ad 0 , & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facile contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2^{dam} Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam **G** inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

Annotat.

Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat.] Nempe **G** hoc pacto: Si ipse sequentem ludum vinceret, expectatio ejus foret $\frac{1}{3}a$; sed si vel primus vel secundus proximi ludi victor evaderet, tertius nihil haberet: quare unum casum habet ad $\frac{1}{3}a$, & duos ad 0 ; id quod ipsi per Coroll. 1. Prop. III. valet $\frac{1}{9}a$.

P R O P O S I T I O I X.

UT tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusûs deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quilibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Hæ autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

C

Pena-

Ponamus tres esse collutores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusûs, & ipsi C similiter duos lusûs. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q .

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur 0. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusûs. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8^{vam} Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusûs, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8^{vam}. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, 0, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collutorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsitâ pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2^{dâ} Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum 0, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2^{dâ} Propositionem tantundem ac $0 + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q : 3$, id est, $\frac{5}{27}q$. Et certum est, hunc divisorem 3 esse numerum collutorum.

Ut autem inveniatur, quid cuiquam debeatur in quolibet casu, videlicet si vel ipse vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casûs primò investigare, & horum medio sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit, priusquàm ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in quo deficientes lusûs erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusûs sunt 1, 2, 3, quin primùm calculo subductus sit casus deficientium lusuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo lusus deficientes sunt 1, 1, 3; qui similiter per 8^{vam} Propositionem supputari potuisset. Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casûs omnes, qui in sequenti tabulâ comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 collusoribus.

DE

Lufus qui ipfis deficiunt	1. 1. 2	1. 2. 2	1. 1. 3	1. 2. 3
Eorum partes	4. 4. 1	17. 5. 5	13. 13. 1	19. 6. 2
	9	27	27	27

Lufus qui ipfis deficiunt	1. 1. 4	1. 1. 5	1. 2. 4	1. 2. 5
Eorum partes	40. 40. 1	121. 121. 1	178. 58. 7	542. 179. 8
	81	243	243	729

DE

Lufus qui ipfis deficiunt	1. 3. 3	1. 3. 4	1. 3. 5
Eorum partes	65. 8. 8	616. 82. 31	629. 87. 13
	81	729	729

Lufus qui ipfis deficiunt	2. 2. 3	2. 2. 4	2. 2. 5	2. 3. 3	2. 3. 4	2. 3. 5
Eorum partes	34. 34. 13	338. 338. 53	353. 353. 23	133. 55. 55	451. 195. 83	1433. 635. 119
	81	729	729	243	729	2187

DE TESSERIS.

QUOD ad Tesseræ attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt : videlicet, quotâ vice unâ tesserâ senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est. Primò unius tesseræ sex esse jactûs diversos, quorum quivis æquè facile eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum tesserarum 36 esse diversos jactûs, quorum similiter quivis æquè facile obtingere potest. Nam ratione cujusque jactûs unius tesseræ potest unus sex jactuum alterius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactûs. Item trium tesserarum esse 216 jactûs diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in 3^{tiâ} sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactûs. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactûs esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulterius jactûs quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactûs præcedentis.

Porrò notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactûs, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseræ vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patere posse. Quatuor punctorum tres sunt jactûs, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta, vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactûs.

Quinque vel novem punctorum 4^{or} sunt jactûs.

Sex vel octo punctorum 5^{que} sunt jactûs.

Septem punctorum 6 sunt jactûs.

In tribus tesseris reperiuntur	}	3 vel 18	}	punctorum	}	1	} jactūs.
		4 vel 17				3	
		5 vel 16				6	
		6 vel 15				10	
		7 vel 14				15	
		8 vel 13				21	
		9 vel 12				25	
		10 vel 11				27	

Annotat.

Quod hic Auctor præstitit in duobus & tribus tesseris, præstari quoque potest in quatuor quinque pluribusve, in quibus numeri jactuum quotvis punctorum haud aliter invenientur. At quia facile fieri potest, præsertim ubi tesserae multae fuerint, ut quamplurimi jactūs prætereantur, nisi aliquem in iis inquirendis ordinem observes, ostendam quâ quis methodo uti debeat, ut certus esse possit, se omnes adinvenisse nullo prætermisso. Primò inquirendum, quot modis diversis componi possit propositus punctorum numerus, ex tot partibus quot sunt tesserae, quarumque partium nulla senarium superet: deinde explorandum, quot jactūs cuilibet horum modorum respondeant; quæ quidem omnia meliùs exemplis quàm regulis addisci possunt: Esto itaque indagandum, quot jactūs reperiantur 12 punctorum in 4 tesseris.

Hunc in finem incipio à 4 unitatibus, scribendo 1.1.1.1; deinde primam unitatem adaugeo continuâ additione unitatum, quousque senarium efficiant & habeatur 6.1.1.1; sed quia summa horum numerorum nondum exæquat numerum propositum 12, attollo etiam secundam partem ad binarium, ad ternarium, scribendo 2.2.1.1, deinde 3.3.1.1, singulisque vicibus primum numerum ad senarium elevo, ut habeantur 6.2.1.1, & 6.3.1.1, quorum summæ adhuc à proposito numero deficiunt: quare pergo scribere 4.4.1.1, primoque quaternario ad senarium elevato habebō tandem 6.4.1.1, quorum summa æqualis 12; quare seorsim illos adnoto: postea scribo 5.5.1.1, quos quia pariter 12 efficiunt, iterum reservo. Jam quia 6.5.1.1, uti & 6.6.1.1, excedunt 12,

illis neglectis tertiam quoque unitatem, quæ hætenus intacta man-
 fit, ad binarium elevo, scribendo 2.2.2.1, sed quia primo bina-
 rio ad senarium promoti numeri 6.2.2.1, deficiunt adhuc à 12,
 transeo ad 3.3.2.1, quorum primus pro more adauctus exhibet
 numeros 6.3.2.1, seorsim ponendos, quia complent 12: Deinde
 solummodò secundam partem augeo, primam verò minuo unitate,
 & habebò alios quatuor 5.4.2.1 seorsim adnotandos. Jam non
 pergo attollere secundam partem ad 5 vel 6^{arium}, quia ad complen-
 dum 12 deprimenda esset prima ad 4 vel 3^{arium}, & sic præceden-
 tes quidam modi redirent; nam ad hoc cavendum semper opus est,
 ut nulla partium priorum minor constituatur ullâ sequentium: quo-
 circa statim propero ad 3.3.3.1, ubi mutato primo ternario in qui-
 narium obtineo numeros 5.3.3.1 constituentes summam proposi-
 tam. Mox verò secundâ parte sublatâ & primâ depressâ ad qua-
 ternarium, habebò alios quatuor numeros quæsito satisfaciētes
 4.4.3.1. Porrò quia manifestum est, neutram duarum priorum
 partium, imò nec ipsam tertiam partem unitate posse augeri, quin
 vel summa omnium quatuor excedat 12, vel aliqua præcedentium
 partium minor fiat aliquâ subsequēntium, & sic pristini quidam mo-
 di redeant; idcirco postremam etiam unitatem, quam hætenus in-
 tactam reliqui, ad binarium promoveo scribendo 2.2.2.2, primo-
 que binario ad 6^{arium} sublato, 6.2.2.2, qui modus quæsito satis-
 facit. Hinc secundam partem augeo, primam minuo, tum unita-
 te, tum binario, & habebò duos alios modos requisitos 5.3.2.2,
 & 4.4.2.2. Ubi quia denuò apparet, neutram priorum partium
 posse augeri, quin vel altera minuatur, & sic pristini resultent mo-
 di; vel summa omnium superet 12; progredior ad 3.3.3.2, sive
 aucto unitate primo ternario ad 4.3.3.2, qui novum modum sup-
 peditant, quo componi potest numerus propositus. Tandem quo-
 niam ob eandem rationem nullam trium priorum partium ampliùs
 augere licet, postrema ad ternarium elevanda scribendumque 3.3.3.3,
 quorum summa & ipsa æquat 12; quo facto non fas est ulterius
 progredi, quandoquidem postremus terminus augeri nequit, quin
 aliquis priorum diminuatur, & sic redire faciat unum præceden-
 tium modorum. Quapropter constat, nullos dari alios modos,
 quibus componi possit numerus 12 ex quatuor aliis, quorum sin-
 guli

guli senarium non superant ; præter undecim hætenùs enumeratos, quos eo ordine quo sese offerebant, adjuncto laterculo insertos conspicis.

Haud absimili autem ratione recensere poterimus omnes modos possibiles, quibus evenire potest quilibet alius punctorum numerus in tot tesseris quot quis voluerit, dummodò advertamus, primæ tesseræ puncta continuâ adjectione unitatis elevanda esse ad senarium, priusquàm puncta secundæ augeantur solâ unitate, & puncta pariter secundæ attollenda ad senarium, priusquàm puncta tertiæ augeantur unitate, & puncta tertiæ, priusquàm puncta 4^{tæ}, & 4^{tæ} priusquàm 5^{tæ}, & ita deinceps.

Modi	Jactûs.
6. 4. 1. 1	12
5. 5. 1. 1	6
6. 3. 2. 1	24
5. 4. 2. 1	24
5. 3. 3. 1	12
4. 4. 3. 1	12
6. 2. 2. 2	4
5. 3. 2. 2	12
4. 4. 2. 2	6
4. 3. 3. 2	12
3. 3. 3. 3	1
<i>Summa</i> <i>Jactuum</i>	125

Hoc peracto, aliud superest negotium in eo consistens, ut exploretur numerus jactuuum singulorum modorum ; nam singulis horum modorum plures iterum respondere possunt jactûs, prout hic vel ille numerus in hâc illâ-

vê tesserâ conspici potest. Ita si quatuor tesseræ vocentur A, B, C, & D, patet ad primum modum efficiendum 6.4.1.1, posse vel in A 6, & in B vel C vel D 4 ; vel in B 6, & in A vel C vel D 4, &c. puncta reperiri : unde tot resultabunt jactûs, quoties isti 4 numeri diverso ordine locari possunt ; quod de reliquis modis pariter intelligendum. Possunt verò numeri 6.4.1.1, quorum duo sunt diversi, duo iidem, locum inter se permutare duodecies : sequentes 5.5.1.1, quorum duo priores, ut & posteriores duo sunt iidem, non nisi sexies : sequentes verò 6.3.2.1, qui omnes inter se differunt, vicies quater ; uti constabit ex Doctrinâ de Permutationibus & Combinationibus, quam parte secundâ pertractandam suscepi. Hi jactûs unâ cum jactibus reliquorum modorum in unam summam collecti efficiunt 125, numerum indigitantem omnes quotquot dari possunt jactûs 12 punctorum in 4 tesseris. Quod ipsum indagandum erat.

Verùm enimverò quoniam hæc methodus supputandi numerum jactuuum in pluribus tesseris, supra modum tædiosa & proluxa est,

est, ostendam porrò, quâ arte idem consequi possimus non tantùm pro certo punctorum numero, sed pro omnibus omninò punctis, beneficio appositæ Tabulæ, quæ & expedite admodum construi potest, & naturam progressionemque, quam numeri jactuum inter se servant, apertius ob oculos ponit. Constructio talis est: Scribantur ordine numeri omnium punctorum quotquot tesserae recipere possunt à minimo ad maximum, putà, 4. 5. 6. 7 &c. usque ad 24 pro tessera quatuor; aut 5. 6. 7. 8 &c. usque ad 30 pro tessera quinque, &c. & sub eorum sex primis collocentur sex unitates, quibus subjungantur sex aliæ unitates, & his iterum sex aliæ, idque fiat sexies, promovendo singulis vicibus earum primam uno gradu versùs dextram: quo factò addendæ quæ in eâdem serie perpendiculari sibi invicem respondent, ut fiant numeri 1. 2. 3. 4 &c. Horum deinde numerorum sex quoque constituendi sunt ordines, ita ut sequentium quilibet præcedenti uno puncto anterior fiat; & tum addendi, ut prodeant numeri 1. 3. 6. 10 &c. Hi iterum sexies gradatim ponendi & addendi; idque tamdiu continuandum est, donec tot ex ultimâ additione resultantes habeantur numeri, quot reperiuntur diversa puncta in proposito tesserarum numero; significabuntque numeri singuli punctorum sibi respondentium jactûs. Ita 4 tesserarum jactus unus est, qui 4 aut 24 puncta producit, quatuor jactûs, qui 5 aut 23, decem qui 6 aut 22, viginti qui 7 aut 21 puncta efficiunt &c. Rationem hujus constructionis attendenti percipere haud difficile est: Cùm enim singulæ accedentes tesserae jactûs præcedentium sextuplicent, manifestum est, cur numeri jactuum præcedentium tesserarum sexies repetendi & addendi sint; & quia numeri punctorum, qui singulis istis jactibus respondent, augentur unitate, vel binario, vel ternario &c. prout in accedente tessera vel unum, vel duo, vel tria &c. inveniuntur puncta, patet etiam, cur series ista jactuum singulis vicibus uno gradu dextrorsum promovenda sit, nimirum ut hâc ratione cuilibet jactuum numero respondeat numerus punctorum unitate major, quàm eidem respondebat in serie præcedente.

Nota, non omnes punctorum numeros pro 5 & sex tessera ob spatii defectum apponi potuisse; sed facile suppleantur, qui desunt, ex parallelis: nam bini punctorum numeri ab extremis æqualiter remoti

Tesseræ:	I	1.	2.	3.	4.					
	II	2.	3.	4.	5.					
	III	3.	4.	5.	6.					
	IV	4.	5.	6.	7.	0.	21.	22.	23.	24.
	V	5.	6.	7.	8.	1.	22.	23.	24.	25. &c.
	VI	6.	7.	8.	9.	12.	23.	24.	25.	26. &c.

Num. jactuum
pro Tesseris, I.

I.	1.	1.	1.	1.					
		1.	1.	1.					
			1.	1.					
				1.					
II.	1.	2.	3.	4.					
		1.	2.	3.					
			1.	2.					
				1.					
III.	1.	3.	6.	10.	1.				
		1.	3.	6.	1.	1.			
			1.	3.	3.	1.			
				1.	6.	3.	1.		
					10.	6.	3.	1.	
					15.	10.	6.	3.	1.
IV.	1.	4.	10.	20.	35.	20.	10.	4.	1.
		1.	4.	10.	25.	35.	20.	10.	4.
			1.	4.	18.	56.	35.	20.	10.
				1.	24.	80.	56.	35.	20.
					25.	104.	80.	56.	35.
					40.	125.	104.	80.	56.
V.	1.	5.	15.	35.	70.	420.	305.	205.	126. &c.
		1.	5.	15.	35.	1.	540.	420.	305.
			1.	5.	185.	651.	540.	420.	305.
				1.	80.	735.	651.	540.	420.
					80.	780.	735.	651.	540.
					35.	780.	780.	735.	651.
VI.	1.	6.	21.	56.	126.	1,390.	6,343.	1,285.	6,224. &c.

Puncta :

Ad Pag. 24.

I II III IV V VI	I.	2.	3.	4.	5.	6.															
	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.										
	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.					
	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.
	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25. &c.
	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26. &c.

Num. jactuum pro Tessera, I.	I.	I.	I.	I.	I.	I.																
		I.	I.	I.	I.	I.	I.															
			I.	I.	I.	I.	I.	I.														
				I.	I.	I.	I.	I.	I.													
					I.	I.	I.	I.	I.	I.												
						I.	I.	I.	I.	I.	I.											
II.	I.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.											
		I.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.										
			I.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.									
				I.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.								
					I.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.							
						I.	2.	3.	4.	5.	6.	5.	4.	3.	2.	1.						
III.	I.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.						
		I.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.					
			I.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.				
				I.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.			
					I.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.		
						I.	3.	6.	10.	15.	21.	25.	27.	27.	25.	21.	15.	10.	6.	3.	1.	
IV.	I.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	4.	1.	
		I.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	4.	
			I.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	10.	
				I.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	20.	
					I.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	35.	
						I.	4.	10.	20.	35.	56.	80.	104.	125.	140.	146.	140.	125.	104.	80.	56.	
V.	I.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	205.	126.	&c.
		I.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	205.	
			I.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	305.	
				I.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	420.	
					I.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	540.	
						I.	5.	15.	35.	70.	126.	205.	305.	420.	540.	651.	735.	780.	780.	735.	651.	
VI.	I.	6.	21.	56.	126.	252.	456.	756.	1161.	1666.	2247.	2856.	3431.	3906.	4221.	4332.	4221.	3906.	3431.	2856.	2247.	&c.



remoti (quos parallelos voco) æquali semper jactuum numero gaudent.

Non inopportunum erit hîc loci indigitare, cùm id scire nonnunquam intersit, quot jactibus effici possint in tribus tesseriis puncta triplicata vel duplicata, (Galli vocant *rafles* & *doublets*) hoc est, quoties contingere queat, ut vel in omnibus tribus, vel saltem in duabus tesseriis, reperiatur æqualis punctorum numerus: Liquet verò, unum tantum esse jactum, quo produci possunt tres senarii, item unum quo tres quinariis, unum quo tres quaternarii &c. adeoque non nisi 6 punctorum triplicatorum jactûs existere posse. Sed contra 15 sunt jactûs, quibus duo ex. gr. senarii contingere possunt: etenim si tesserae vocentur A, B, & C, fieri potest, ut duo illi senarii reperiantur vel in tesseriis A & B, vel in A & C, vel in B & C, quod tres casûs efficit: ac deinde ratione cujusque horum casuum jactus tertiæ tesserae, in quâ diversus punctorum numerus conspici debet, variari potest quinquies; unde quinquies tres seu 15 existunt duorum senariorum jactûs; quod cùm idem de duobus quinariis, quaternariis & reliquis intelligendum, sequitur punctorum duplicatorum esse sexies quindecim seu 90 jactûs: Proinde cùm trium tesserarum jactûs in universum existant 216, erunt reliqui 120 jactûs simplices, quorum numerus etiam initio investigari potuisset.

P R O P O S I T I O X.

INvenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tessera 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casûs, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactûs contra ipsum, & tantum unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur *a*. Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum *a*, sed quinque ad obtinendum \circ ; id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vicē suscipere velit.

D

Qui

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, fors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciatur, obtinet a . Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciatur, unus tantum casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a ; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{1}{6}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{5}{6}a$; adeò ut fors utriusque sive æstimatio expectationis eam fervet rationem, quam 11 ad 25; id est, minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd fors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{21}{125}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

H Qui quatuor vicibus idem suscipit, fors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plus quàm 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, fors ejus est $\frac{4551}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, fors ejus est $\frac{31031}{46656}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

Annotat.

H *Qui quatuor vicibus idem suscipit, &c.*] Subiit aliquando cogitatio, posse fortè quempiam calculum Auctoris tali discursu suspectum reddere: Si quis quatuor jactibus senarium jacere contendens, æquam circiter ad vincendum ac perdendum expectationem habeat, hoc est, æquè facillè vincat ac perdat, fiet ut aliquandiu ludens toties vincat quoties perdit, si & pari fortunâ utatur; adeoque ut è quaternis jactibus toties unus senarius existat, quoties è quaternis aliis nullus: quare in octonis jactibus unus reperietur senarius, ac proinde in sexcentis verb. gr. jactibus senarii 75. Sunt jam sex alii, qui eâ conditione ludant, ut primus vincat, si unum punctum jaciatur, secundus si duo, tertius si tria &c. quo utique pacto

paçto æquâ forte certabunt ; sed ludant etiam pari fortunâ , sic fiet necessariò , ut in sexcentis jaçtibus centum eveniant senarii : idcirco cum æquâ forte & pari fortunâ luditur , in sexcentis jaçtibus senarii prodibunt centum & pauciores quàm centum , quod absurdum. Huic fallaciæ ut satisfiat , pono quidem , quòd ubi æquâ fortunâ luditur , ibi in jaçtibus 600 evenire debent senarii centum ; sed nego , quòd si quis quaternis jaçtibus semel senarium jacere certaverit , propterea quatuor jaçtibus ad vincendum opus habeat ; potest enim vel primus , vel secundus , vel tertius jaçtus senarius existere , quo casu reliqui jaçtûs sequenti quaternario annumerantur ; sic ut pauciores quàm octo ad semel vincendum ac perdendum sufficere possint. Id verò quo paçto huc quadret , sic ostendo : Fingo , in omnibus jaçtuum quaternariis , qui me ludi victorem reddunt , primum quemque jaçtum senarium existere ; sic centies vincendo non nisi centum jaçtûs infumuntur , reliqui 500 per 4 divisi indigitant me 125^{ies} perditurum. Si verò illorum quaternorum jaçtuum postremus quisque senarius foret , vincendo centies 400 jaçtûs absumerentur , residuis tantum ducentis , qui ostenderent me quinquages perditurum. Quocirca cum nonnullis casibus sæpius perderem quàm vincerem , aliis pluries vincerem quàm perderem , colligo fieri bene posse , ut hâc conditione æquâ forte certetur. Contra verò , si quis tribus vicibus semel senarium jacere suscipiat , is quidem aliquot casibus toties vinceret quoties perderet , nempe si tertius quivis jaçtus senarius existeret ; aliis multò pluries perderet quàm vinceret , si nim. primus quisque senarius foret ; sed nullo casu sæpius vinceret quàm perderet : unde constare liquidò potest , neminem nisi cum detrimento tali conditione certare posse. Quæ quidem eum in finem hîc adduco , ut palàm fiat , quàm parùm fidendum sit ejusmodi ratiociniis , quæ corticem tantum attingunt , nec in ipsam rei naturam altiùs penetrant ; tametsi in toto vitæ usu etiam apud sapientissimos quosque nihil sit frequentius.

P R O P O S I T I O X I.

INvenire , quot vicibus suscipere quis possit , ut duabus tesseris 12 puncta jaciât.

D 2

Si

Si quis primâ vice duos senarios jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, id est, ad obtinendum a ; & 35 esse casûs, quibus perdat sive nihil habeat, quoniam 36 sunt jactûs. Itaque habet per 2^{dam} Propositionem $\frac{1}{36} a$.

Qui duabus vicibus idem suscipit, si primâ vice duos senarios jaciât, obtinebit a ; si verò primâ vice diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, id quod ipsi, per illud quod jam dictum est, valet $\frac{1}{36} a$.

Atqui ut primâ vice duos senarios jaciât, unus tantum est casus, sed 35 casûs, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a , & 35 qui dent $\frac{1}{36} a$; id quod per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{71}{1296} a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296} a$.

Ex his invenire licet, qualis sit ei fors aut pars, qui idem suscipit quaternis jactibus, prætereundo casum eum, cum quis illud ternis jactibus suscipit.

Etenim, qui 4^{or} vicibus duos senarios jacere contendit, si illud 1^{ma} aut 2^{da} vice faciat, obtinet a ; sin minus, restant ipsi duo jactûs, qui per illud quod superius dictum est, valent $\frac{71}{1296} a$. Sed I propter eandem rationem habet etiam 71 casûs, ut ex duobus primis jactibus semel duos senarios jaciât, contra 1225 casûs, quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio 71 casûs, qui ipsi dent a , & 1225 casûs, qui dent ipsi $\frac{71}{1296} a$. Quod ipsi per 2^{dam} Propositionem valet $\frac{178991}{1679616} a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616} a$. Id quod ostendit eorum sortes esse ad se invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus semel duos senarios jacere certat. Ac inde rursus expectatio ejus, qui idem suscipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui istud 8 vicibus suscipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in se recipit. In quâ operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis fors incipiat, inter eum qui id suscipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immensum excrescerent, posteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus suscipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potio^{riorem} conditionem inire, cum 25 jactibus aggreditur.

Annotat.

Sed propter eandem rationem habet etiam 71 casûs &c.] I
 Juvat hîc observare, quod Auctor supponit, expectationem quam-
 cunque fractione expressam considerari etiam posse tanquam resul-
 tantem ex tot casibus ad obtinendum depositum a , quot indigitat
 numerator fractionis, & tot casibus ad nihilum, quot significat
 differentia inter illum & denominatorem; tametsi fortâssis aliter
 ad expectationem illam perventum fuerit: Sic quanquam ille, qui
 duabus vicibus duos senarios jacere suscipit, ad expectationem suam
 $\frac{71}{1296} a$ perveniat per 1 casum ad a , & 35 casûs ad $\frac{1}{36} a$; nihilomi-
 nus censei etiam poterit eam sibi acquirere per 71 casûs ad a , &
 1225 casûs ad 0. Quoniam habens 71 casûs ad a , & 1225 ad 0,
 habet hanc expectationem $\frac{71}{1296} a$; & qui plures casûs ad a habe-
 ret ac pauciores ad nihilum, aut vice versâ, ejus quoque expectatio
 contra hypoth. major minorvé foret, quàm $\frac{71}{1296} a$, per Coroll. 1.
 Proposit. III.

Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus susci- K
pit &c.] In præced. Propos. adstruxit Auctor, posse quatuor
 jactibus cum lucro suscipi, ut unâ tesserâ senarius jaciatur; nunc
 asserit, nondum illud 24 jactibus posse, ut duabus tesseris duo ja-
 ciantur senarii; quæ multis planè videbuntur *αόυσαλα*, cùm 24 ja-
 ctûs ad omnes 36 jactûs duarum tesserarum eandem præcisè ratio-
 nem fervent, quam 4 jactûs ad omnes sex jactûs unius tesseræ. Eâ-
 dem olim difficultate constrictus hæsit, referente Pascasio in literis
 ad Fermatium, quæ hujus operibus Tolosæ A°. 1679. impressis pa-
 gin. 181. insertæ leguntur, Anonymus quidam cæterâ subacti judi-
 cii Vir, sed Geometriæ expers. Hâc enim qui imbuti sunt, ejus-
 modi *εναυλοφωσνείας* minimè morantur, probè conscii dari innumera,
 quæ admoto calculo aliter se habere comperiuntur, quàm initio
 apparebant; ideoque sedulò cavent, juxtâ id quod semel iterum-
 que monui, ne quicquam analogiis temerè tribuant.

Ad Propositionem in genere :

SI pro numeris literas substituisset Auctor, potuisset hanc & præcedentem Propositionem uno Problemate complecti, ejusque solutionem generalem pari facilitate investigare, hoc pacto: Ponatur $a \times b + c$ pro numero omnium casuum, qui reperiuntur in unâ pluribusvé tesseriis, aut in quâvis aleâ, (cùm hæc non magis tesseriis applicari debeant, quàm quibusvis fortitionibus aliquoties reiterandis, & in quibus numerus casuum perpetuò constans idemque manet) b verò sumatur pro numero casuum, quibus præscriptus punctorum numerus obtinetur, seu quibus obtinetur quod susceptum est; & c pro numero casuum, quibus illud non obtinetur, seu quibus non præstatur quod intenditur.

Jam si quis primâ vice suscipiat præstare aliquid, patet, eum habere b seu $a - c$ casûs ad illud præstandum, hoc est, ad obtinendum depositum, quod nunc sit 1, & c casûs ad obtinendum 0; quare ejus fors per Cor. I. Prop. III. fit $\frac{a-c}{a}$: Si quis duabus vicibus illud suscipiat, rursus habet $a - c$ casûs ad 1 vel $\frac{a}{a}$, sed c casûs quibus pertingit ad præcedentem expectationem $\frac{a-c}{a}$; id quod per III. Prop. valet $\frac{a(a-c)}{a^2}$: Si quis tribus vicibus idem præstare contendat, habet denuò $a - c$ casûs ad 1 seu $\frac{a^2}{a^2}$, & c casûs ad fortem proximè inventam $\frac{a(a-c)}{a^2}$; quod ipsi tantundem valet, ac $\frac{a^3 - c^3}{a^3}$; Eodem modo, si 4 vicibus illud in se recipiat, invenitur ejus expectatio $\frac{a^4 - c^4}{a^4}$: si quinque, $\frac{a^5 - c^5}{a^5}$; & in genere si n vicibus, reperitur fors ejus $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, sic ut remaneat contracertanti $\frac{c^n}{a^n}$.

Præter hanc methodum, quæ Auctoris est, duo alii suppetunt modi haud inelegantes Problema solvendi, quorum unus hic est: Quærantur ordine expectationes aleatoris pro singulis jactibus seorsim,

sim, hoc est, quærat quæ sint illius sortes, si primo, secundo, tertio, quarto &c. demùm jactu, non alio, præstare quid velit; quod enim ex omnium expectationum additione resultat, erit expectatio quæsitæ. Qui primo jactu quid suscipit, ejus fors ostensa est esse $\frac{a-c}{a} \propto \frac{b}{a}$. Qui secundo jactu præstare vult, ille si primo præstat, non præstat quod intendit, cùm solo secundo præstare debuisset; ideoque deposito frustratur: sin autem primo non præstat, restat illi unus jactus quo id præstare tenetur, qui ipsi valet, ut dictum $\frac{b}{a}$; sed numerus casuum, quibus primo jactu id efficit, per hyp. est b , & eorum quibus non efficit c ; unde per 1. Coroll. III. fors ejus fit $\frac{be}{aa}$. Qui tertio demùm jactu præstare intendit, is si primo præstat rursus deposito excidit, quia intentum non assecutus est, quod eò tendebat, ut solo tertio præstaret: sin primo jactu non præstat, supersunt ipsi duo jactûs, quorum solo posteriori præstare tenetur, quo casu ostensum est ipsi deberi $\frac{bc}{aa}$; sed prius illud b , hoc c casibus contingere potest, quod proin sortem ejus per idem Coroll. efficit $\frac{bcc}{a^3}$. Qui solo 4^{to} jactu præstare aggreditur, is si primo præstat, deposito identidem privatur: si secùs, per tres residuos jactûs ad præced. expectationem $\frac{bcc}{a^3}$ pertingit; quod illi nunc sortem parit $\frac{bc^3}{a^4}$. Atque eodem modo colligitur, quòd fors ejus, qui 5^{to} jactu in se recepit, sit $\frac{bc^4}{a^5}$; qui sexto, $\frac{bc^5}{a^6}$; & generaliter qui n jactu, $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$. Ergò cùm fors ejus, qui primo jactu aggressus est, sit $\frac{b}{a}$; qui secundo, $\frac{bc}{aa}$; qui tertio, $\frac{bcc}{a^3}$; qui ultimo, $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$; atque expectatio ejus, qui illud indefinitè in aliquo primorum n jactuum præstandum suscepit, ex omnibus illis simul sumtis confletur, sequitur hanc fore ejus expectationem

$$\frac{b}{a} +$$

$\frac{b}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^3}{a^4} \dots$ usque ad $\frac{bc^{n-1}}{a^n}$, quæ series est quantitatum geometricè - proportionalium, quarum summa invenitur $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, ut supra.

Alter modus: Qui n jactibus unius tesseræ præscriptum puncto-
rum numerum jacere suscipit, perinde facit, ut ad seq. Prop. ostendatur, ac si eundem unico jactu n tesserarum in aliquâ minimùm tesserâ jaciendum susciperet. Concipiuntur itaque n tesseræ, singulæ instructæ a hedris, quas inter sint c isto punctorum numero non signatæ. Sic erit numerus omnium casuum in universis n tesseris, a^n ; (ut supra post Prop. IX. evicit Auctor) & per eandem rationem numerus eorum, quibus optata puncta in nullâ tesserarum emicant, c^n ; quia nimirum ratione cujuslibet ex c hedris unius tesseræ, quælibet similium hedrarum alterius tesseræ simul cadere potest. Necessè igitur est, ut reliquis $a^n - c^n$ casibus hæc puncta saltem in aliquâ tesserarum reperiantur. Quare qui tali conditione certat, habet $a^n - c^n$ casûs ad obtinendum depositum 1, & c^n casûs ad obtinendum 0; quod rursus ut antea sortem illi parit $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, sic ut contracertanti semper relinquatur $\frac{c^n}{a^n}$.

Exhibitâ sic generali Problematis solutione, si nunc potèrò cum Auctore scire cupiamus, quo jactuum numero æqualis fors inter contracertantes incipiat, æquandæ tantùm inter se erunt eorum inventæ sortes, ut fiat $a^n - c^n \propto c^n$, hoc est, $a^n \propto 2c^n$; quo indicatur nil aliud requiri, quàm ut numerus omnium casuum, & numerus eorum quibus non obtinetur quod susceptum est, continuo in se ductu ad similes potestates attollantur, quousque productum prioris numeri fiat posterioris duplum: tum enim index potestatis, ad quam uterque elevatus est, indigabit quæsitum. Quæ operatio illud insuper commodi præ Hugenanâ habet, quòd non supponat ullius præcedentis casûs sortem cognitam esse: cætera enim compendia, quorum meminit Auctor, de abscindendis à fine notis, & eliciendis per saltum expectationibus, & hîc loci obtinet;

quan-

quandoquidem dato cujuslibet numeri quadrato, ejus biquadratum inveniri potest non reperto cubo, & liquadrato-quadratum non repertis intermediis potestatibus, &c. Visum autem est, exempli Auctoris, in quo a valet 36 & c 35, totam operationem hinc subjungere:

<i>justo</i>	<i>minor</i>	<i>major</i>	<i>min.</i>	<i>maj.</i>
a	36		c	35
aa	1296		cc	1225
a^4	1679 . .	1680 . .	c^4	1500 . . 1501 . .
a^8	2819 . .	2823 . .	c^8	2250 . . 2254 . .
a^{16}	7946 . .	7970 . .	c^{16}	5062 . . 5081 . .
a^{24}	2239 . .	2250 . .	c^{24}	1138 . . 1146 . .
a^{25}	8060 . .	8100 . .	c^{25}	3983 . . 4011 . .
			$2c^{24}$	2276 . . 2292 . .
			$2c^{25}$	7966 . . 8022 . .

ubi liquet, 24^{tam} potestatem numeri 36 (quæ cadit inter 2239 . . & 2250 . .) deficere à $24^{tæ}$ potestatis numeri 35 duplo (quod cadit inter 2276 . . & 2292 . .): sed 25^{tam} potestatem illius numeri (cujus limites sunt 8060 . . & 8100 . .) excedere vicissim duplum $25^{tæ}$ hujus, (utpote quod terminis continetur 7966 . . & 8022 . .).

Monendum tamen est, totum hoc expediri posse negotium compendio citra comparisonem majori per logarithmos, ita: Quia habemus $a^n \propto 2c^n$, & æqualium numerorum æquales sunt logarithmi, erit quoque $n \log a \propto \log 2 + n \log c$, sive $n \log a - n \log c \propto \log 2$, seu denique $n \propto \frac{\log 2}{\log a - \log c}$; quo indicatur quæsitum numerum jactuum haberi, dividendo simpliciter log-um binarii per differentiam inter log-os numerorum a & c . En operationem:

$$\begin{array}{l|l} a \propto 36 & \log a \propto 1.5563025 \\ c \propto 35 & \log c \propto 1.5440680 \end{array}$$

$$\log a - \log c \propto 0.0122345 \quad \log 2 \propto 0.3010300 \quad (\text{plus}$$

quàm 24, & minus quàm 25; quæ calculo Auctoris & nostro plane sunt consona.

E

Cæte-

Cæterum solutio nostræ Propositionis præsentis ansam nobis suppeditavit investigandi præterea nonnulla alia huic affinia Problemata, quorum unum hoc est: Si plures collusores jacere suscipiant præscriptum punctorum numerum, iisque singulis uni post alterum nonnulli jactus, huic plures illi pauciores, continuò instituendi concedantur, quæritur cujusque fors? Ante omnia liquet, quòd ille

cujus fors quæritur haberet per ante ostensa $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, si ipse ludum

inciperet; sed quia alii præcedunt, qui victoriam illi præripere possunt, fors ejus minoris æstimanda venit. Deinde patet, quòd expectationes omnium ipsum præcedentium simul sumtæ æquari debeant expectationi unius solius, qui in locum eorum succedere vellet, & cui tot jactus concederentur quot omnibus illis simul. Sed per eandem rationem, si numerus horum jactuum dicatur s , expe-

ctatio hæc foret $\frac{a^s - c^s}{a^s}$; unde per annotata hujus ad lit. I. ille cu-

jus fors quæritur, tum, cùm primus ludere incipit, habere censetur $a^s - c^s$ casus, quibus aliquis præcedentium vincat sibi que depositum præripiat; & c^s casus, quibus ludendi vices ad se devolvuntur,

ipseque sortem antè dictam $\frac{a^n - c^n}{a^n}$ acquirit: id quod ipsi per

I. Coroll. III. valet $\frac{a^n - c^n \cdot c^s}{a^n \cdot a^s} \propto \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^n + s}$. Idem etiam sic

evincitur: Quia universis collusoribus incluso ultimo per hyp. concessi sunt $s + n$ jactus, erit eorum expectatio totalis $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}}$;

à quâ proin si expectationes omnium præcedentium postremum, quæ simul sumtæ constituunt $\frac{a^s - c^s}{a^s}$, subtrahas, relinquetur pro

expectatione folius ultimi $\frac{a^{s+n} - c^{s+n}}{a^{s+n}} - \frac{a^s - c^s}{a^s} \propto \frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^n + s}$,

ut antea. Nota, insignitèr hîc abbreviari calculum, si numeri casuum a & c compositi sint, & eorum loco per 2. Cor. III. minimi

in eâdem ratione termini accipiantur : Proponantur ex. gr. aliquot collusoribus jacienda duabus tesseris puncta septem, & eorum primo permittatur unus, secundo 2, tertio 3, quarto 4 jactus consecutivè instituendi, velinque scire expectationem quarti. Quoniam hîc numerus jactuum quarti $n \propto 4$, & summa eorum, qui præcedentibus tribus sunt concessi, $s \propto 1 + 2 + 3 \propto 6$; & proin

$$\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^{n+s}} \propto \frac{a^4 c^6 - c^{10}}{a^{10}}; \text{ insuperque numeri } a \text{ \& } c \text{ casuum scil.}$$

tum omnium in duabus tesseris, tum eorum quibus non obtinetur præscriptus punctorum septenarius, sunt 36 & 30, pro quibus pono tantum 6 & 5; idcirco à producto ex 4^{tâ} potestate senarii in 6^{tam} quinariî aufero decimam quinariî, reliquumque divido per decimam senarii, & prodibit pro quæsità expectatione collusoris quarti

$$\frac{10484376}{60466176}$$

Manifestum est in hocce Problemate, omnium collusorum, quotquot etiam fuerint & quotcunque jactus ipsis concedantur, expectationes in unam summam collectas necessariò ab uno integro deficere debere; quandoquidem semper casu quodam utcunque rarissimo accidere potest, ut eorum nullus præscriptum punctorum numerum consequatur. Deinde etiam per se clarum est, quòd in pari jactuum numero unusquisque posteriorum collusorum deterio-rem sortem nancisci debeat unoquoque priorum, eoque magis quòd plures unicuique jactus continuò instituendi conceduntur; cùm utique tot concedi possint, ut primi ludentis spes in certitudinem ferè abeat, reliquis verò omnis vincendi spes evanescat. Quæ proin consideratio aliud nobis suggessit Problema, quod eò tendit, ut dato numero jactuum à primo consecutivè instituendorum investigetur, quot jactus secundo reliquisque concedendi sint, ut sortes omnium fiant æquales: oportet autem, ut numerus jactuum primi non pariatur ei sortem excedentem unum dimidium, si collusores sunt duo; aut tertiam partem integri, si sunt tres; aut 4^{tam} si quatuor &c. cùm secus Problema impossibile foret. Sint collusores m , numerus jactuum ab universis instituendorum vocetur x , ab omnibus excepto ultimo y , adeoque à solo ultimo $x - y$; numerus verò jactuum

primi sit n : erit ejus expectatio $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, & omnium m collusorum

expectationes conjunctim $\frac{a^x - c^x}{a^x}$; cumque singulæ expectationi

primi ponantur æquales, erit quoque earum summa $\frac{m \cdot a^n - c^n}{a^n}$;

quare $\frac{m \cdot a^n - c^n}{a^n} \propto \frac{a^x - c^x}{a^x}$, hoc est $m - \frac{m c^n}{a^n} \propto 1 - \frac{c^x}{a^x}$, seu

factâ transpositione, $\frac{c^x}{a^x} \propto \frac{m c^n}{a^n} + 1 - m \propto \frac{m c^n + 1 - m a^n}{a^n}$, & sum-

tis logarithmis, $x l c - x l a \propto l m c^n + 1 - m a^n - n l a$, factâque

divisione, $x \propto \frac{l m c^n + 1 - m a^n - n l a}{l c - l a}$, sive (mutatis signis ob $a > c$)

$x \propto \frac{n l a - l m c^n + 1 - m a^n}{l a - l c}$. Ob eandem rationem omnium collu-

forum præcedentium ultimum, hoc est, primorum $m - 1$ colluso-

rum expectationes simul sumtæ sunt $\frac{m - 1 \cdot a^n - c^n}{a^n} \propto \frac{a^y - c^y}{a^y}$;

unde simili modo elicitur $y \propto \frac{n l a - l m - 1 c^n + 2 - m a^n}{l a - l c}$: quare

tandem habetur $x - y \propto \frac{l m - 1 c^n + 2 - m a^n - l m c^n + 1 - m a^n}{l a - l c}$;

quod requirebatur. Ita si sint tres collusores, & eorum primo duo concedantur jactus, jacienda verò proponantur duabus tesseris puncta septem (vel etiam unâ tesserâ puncta sex; quia utrobique ratio numeri a ad numerum c ea est, quam habet 6 ad 5) quo casu primi fors per suprâ ostensa, propter $n \propto 2$, est $\frac{a a - c c}{a a} \propto \frac{11}{36}$ paulò minor triente depositi: facio primò $m \propto 2$, deinde $m \propto 3$, & hoc pacto reperio, quòd ad æquandas quàm proximè reliquorum sortes concedendi sint secundo collusori tres, & tertio octo jactus.

P R O P O S I T I O X I I.

INvenire, quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu L quispiam unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quòd si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante M ostensa sunt, $\frac{1}{35}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac $\frac{1}{35}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opus est, ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per X. Propositionem tantundem valet ac si $\frac{1}{35}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{1}{35}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{35}a$, id quod per II. Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{210}a$ seu $\frac{2}{21}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum amplius, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

Annotat.

Hoc autem tantundem est &c.] Si cui decem ex. gr. L tesseris unus jactus concedatur, evidens utique est nihil referre, sive decem illas tesseras simul & semel seu successivè unam post alteram in alveum projiciat: & si successivè id facit, perinde rursus esse constat, sive tesserae illæ decem quæ projiciuntur sint totidem diversæ tesserae, sive una eademque decies ex alveo sublata & projecta.

Per ea quæ ante ostensa sunt &c.] Ostensum est in M præced. Propos. $\frac{1}{35}a$ esse partem ejus, qui uno jactu duabus tesseris duos senarios jacere contendit, sed modò audivimus perinde esse, sive quis unum jactum duabus tesseris, sive duos jactus unâ tesserâ instituat: quare & illi, qui unâ tesserâ duobus jactibus duos senarios, hoc est, bis senarium jacere suscipit, eadem debetur portio $\frac{1}{35}a$.

E 3

Ad

Ad Propositionem in genere :

Problema hîc loci propositum, non secûs atque præcedens, solutionem quoque admittit per symbola; & generaliter conceptum huc redit, ut inveniatur expectatio ejus, qui certo jactuum numero suscepit aliquid præstare bis, vel ter, vel quater pluriesve. Nam qui semel tantum id præstare suscipit, ejus fors in præced. jam Propositione calculo subducta habetur.

Qui duabus vicibus aliquid bis præstare suscipit, ille si primâ vice non præstat nihil depositi habebit, sed totum adversario cedet: sin id primâ vice præstiterit, reliquo aleæ jactu adhuc semel præstare tenetur; quo casu per annotata præced. Propof. (positâ significatione literarum a , b & c , ut ibi) ipsi debetur $\frac{a-c}{a}$, & adversario ejus $\frac{c}{a}$; (præstat enim hujus sortem, ceu brevioribus terminis comprehensam, inquirere.) Atqui sunt b casus, quibus id primâ vice efficere possit; & c casus, quibus secûs eveniat: quocirca sunt contracertanti c casus ad obtinendum depositum $1 \infty \frac{c+b}{a}$, & b casus ad acquirendum $\frac{c}{a}$; id quod ipsi valet $\frac{cc+2bc}{aa}$.

Qui tribus vicibus aliquid bis efficere contendit, ille si primâ vice efficiat, quod semper b casibus evenit, duabus reliquis vicibus idem non nisi semel efficere obstrictus est, sortemque adeò Antagonistæ sui per Annotat. præc. Prop. facit $\frac{cc}{aa}$: sin primâ vice id non efficiat, quod casibus c contingit, tenebitur illud duabus reliquis vicibus bis præstare; quod valere modò diximus Adversario ejus $\frac{cc+2bc}{aa}$. Habet igitur iste c casus ad $\frac{cc+2bc}{aa}$, & b casus ad $\frac{cc}{aa}$; id quod ei parit expectationem $\frac{c^3+3bcc}{a^3}$.

Sic qui quatuor vicibus aliquid bis effectui dare tentat, is b casibus, quibus primus ei jactus ex voto succedere potest, adversario sortem acquirit $\frac{c^3}{a^3}$; & c casibus, quibus contrarium accidit,
eum

eum ad præcedentem expectationem $\frac{c^3 + 3bcc}{a^3}$ perducit; id quod huic sortem gignit $\frac{c^4 + 4bc^3}{a^4}$.

Qui verò tribus vicibus ter præstare quippiam conatur, is si primo jactu scopo aberret, antagonistam suum depositi 1∞ $\frac{cc + 2bc + bb}{aa}$ victorem reddit: sin consequatur quod intendit, re-
fiduos habet duos jactus, quorum etiam uterque ejus voto respon-
dere deberet; quo in statu adversarii sortem ostendimus esse $\frac{cc + 2bc}{aa}$.
Posterius autem b , prius c casibus accidere diximus; unde contra-
certantis expectatio resultat $\frac{c^3 + 3bcc + 3bbc}{a^3}$.

E' quibus porrò haud absimili ratione inveniri possunt expe-
ctationes ejus, qui alteri 4, 5, 6 &c. aleæ jactibus aliquid bis, ter,
quater, pluriesve præstandum offert: unde nata est sequens Tabel-
la, quam quis levi labore continuabit, quousque opus fuerit; si
consideret, columnas transversales tabellæ ordine complecti quan-
titates omnium potestatum binomii $\frac{c+b}{a}$, secundam nim. quadra-
ti, tertiam cubi, quartam biquadrati &c. ita quidem, ut prima co-
lumna verticalium solos primos, secunda duos, tertia tres, quarta
4^{or} priores harum potestatum terminos exhibeat. Hinc enim col-
ligitur facilè, illum qui indefinitè n jactibus aliquid bis præstan-
dum offert, sortem habere $\frac{c^n + nb c^{n-1}}{a^n}$; qui ter, $c^n + nb c^{n-1} +$
 $\frac{n \cdot n - 1}{2} b b c^{n-2} : a^n$; qui quater, $c^n + nb c^{n-1} + \frac{n \cdot n - 1}{2} b b c^{n-2} +$
 $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} b^3 c^{n-3} : a^n$; & generaliter denique, qui illud m vi-
cibus præstandum offert, huic sortem competere $c^n + nb c^{n-1} +$
 $\frac{n \cdot n - 1}{2} b b c^{n-2} + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} b^3 c^{n-3} \dots \dots \dots$ usque ad $+$
 $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \dots n - m + 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m - 1} b^{m-1} c^{n-m+1} : a^n$.

Eadem etiam formula aliter & scitè elici potest, in auxilium
vocatâ combinationum doctrinâ, hoc modo: Constat ex suprâ
Tabu-

Tabula

dictis,

pro cognoscendâ forte eius, qui alteri aliquot alee jactibus quippiam
semel vel aliquoties praestandum offert.

*Nota, fors eius qui suscipit, perpetuò est complementum ad unitatem
fortis illius, qui offert. Num. omnium casuum in singulis jactibus
∞ a; eorum quibus praestatur quod susceptum est ∞ b; quibus
non praestatur ∞ c.*

Si quid praestandum

fit, jactibus

	semel	bis	ter	quater
I.	c : a	cc + 2bc : aa		
II.	cc : aa	c ³ + 3bcc : a ³	3bbc : a ³	
III.	c ³ : a ³	c ⁴ + 4bc ³ : a ⁴	6bbc : a ⁴	4b ³ c : a ⁴
IV.	c ⁴ : a ⁴	c ⁵ + 5bc ⁴ : a ⁵	10bb ² c ³ : a ⁵	10b ³ cc : a ⁵
V.	c ⁵ : a ⁵	c ⁶ + 6bc ⁵ : a ⁶	15bb ² c ⁴ : a ⁶	20b ³ c ³ : a ⁶
VI.	c ⁶ : a ⁶			

m vicibus

$$\begin{aligned}
 & c^n + nbc^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} bb^{n-2} + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3c^{n-3} \dots + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m-1} bm^{-1}c^{n-m+1} : a^n.
 \end{aligned}$$

dictis, eodem recidere, five quis n jactibus unius tesseræ aliquid m vicibus præstandum suscipiat, five id unico jactu n tesserarum in m tesseris præstandum sibi sumat: Sint igitur tesseræ A, B, C, D &c. quarum numerus sit n , singulæ instructæ a hedris, quas inter b voto suscipientis respondeant, reliquæ c non respondeant; & quaeratur, quot casibus accidere possit, ut tum in nullâ tesserarum, tum in unâ tantum tesserâ, tum in solis duabus, 3, 4 &c. tum denique in $m - 1$ tantum tesseris præstetur quod susceptum est: omnibus enim his casibus suscipiens voto suo excidit, & antagonista ejus victoriâ potitur. Ostensum autem fuit in annot. præc. Prop. casus esse c^n , quibus contingere possit ut in nullâ n tesserarum prodeat quod susceptum est: & simili modo colligitur, casus esse c^n , quibus contingere possit ut in nullâ n tesserarum prodeat quod susceptum est; & simili modo colligitur casus esse b vel bb vel b^3 &c. quibus una tesserarum putâ A, aut duæ A & B, aut tres A, B & C &c. suscipientis voto respondeant; sicut & casus c^{n-1} , aut c^{n-2} , aut c^{n-3} &c. quibus cæteræ $n - 1$, vel $n - 2$, vel $n - 3$ &c. tesseræ spem ejus fallant: unde cum singuli horum casuum cum unoquoque priorum conjungi possint, ex ductu horum in illos nascentur casus bc^{n-1} , aut bbc^{n-2} , aut b^3c^{n-3} &c. Et quia tessera illa vel illæ, quæ favent suscipienti, potest esse vel A vel B vel C &c. si sit una: vel A & B, aut A & C, aut B & C &c. si sint duæ: vel A, B & C, aut A, B & D &c. si sint tres, &c. hinc numeri casuum rursus toties multiplicabuntur, quoties ex universis n tesseris singulas, binas aut ternas &c. accipere licet; sed licet hoc, per doctrinam combinationum secundâ parte tradendam, n , vel $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$, vel $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ &c. vicibus: quare factâ hâc alterâ multiplicatione casus emergent nbc^{n-1} , aut $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} bbc^{n-2}$, aut $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3c^{n-3}$ &c. quibus in unâ, duabus, aut tribus &c. duntaxat tesseris, sed quomodolibet sumptis, eveniat quod susceptum est; & consequenter etiam casus $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \dots n - m + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m - 1} b^{m-1}c^{n-m+1}$, quibus id eveniat in $m - 1$ tesseris. Cum itaque omnes hi recensiti casus antagonistam suscipientis, uti dictum, ludi victorem reddant, prætereaque in universis n tesseris casus existant

F

a^n , fiet

a^n , fiet per 1. Coroll. 3. fors ejus $c^n + nbc^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} b^2 c^{n-2}$
 $+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 c^{n-3} \dots + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \dots n-m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m-1} b^{m-1}$
 $c^{n-m+1} : a^n$, ut supra.

Quoniam autem in propositâ quæstione, sicut in præcedente, præcipuè hoc intenditur, ut investigetur, quot aleæ jactibus expectationes lusoris & adversarii incipiant æquari, si-ve utrivis competere dimidium depositi; idcirco nunc porrò æqua-tionem instituo inter repertam adversarii sortem & $\frac{1}{2}$, indeque va-lore numerum n quoad possum determino. Ex. gr. Si cum Aucto-re scire desiderem, quo jactuum numero quid bis præstandum suscipi possit, putà unâ tesserâ senarius bis jaciendus, ut æquâ forte certetur; facio $\frac{c^n + nbc^{n-1}}{a^n} \propto \frac{1}{2}$, & habebò $a^n \propto 2c^n + 2nbc^{n-1}$

$\propto 2c + 2nb$, c^{n-1} , quo indicatur, numerum a ad eam potestatem elevandum esse, quæ proximè sit æqualis producto ex potestate uno gradu depresso ipsius c , & duplo summæ, quam numerus c cum ipso b ducto in indicem potestatis a constituit. Hoc enim factò index potestatis a denotabit numerum jactuum, quo quid bis præstandum suscipi potest. Addo calculum pro Auctoris exemplo, in quo a numerus omnium casuum unius tesseræ valet 6, b numerus eorum quibus obtinetur senarius 1, & c eorum quibus non obtinetur 5:

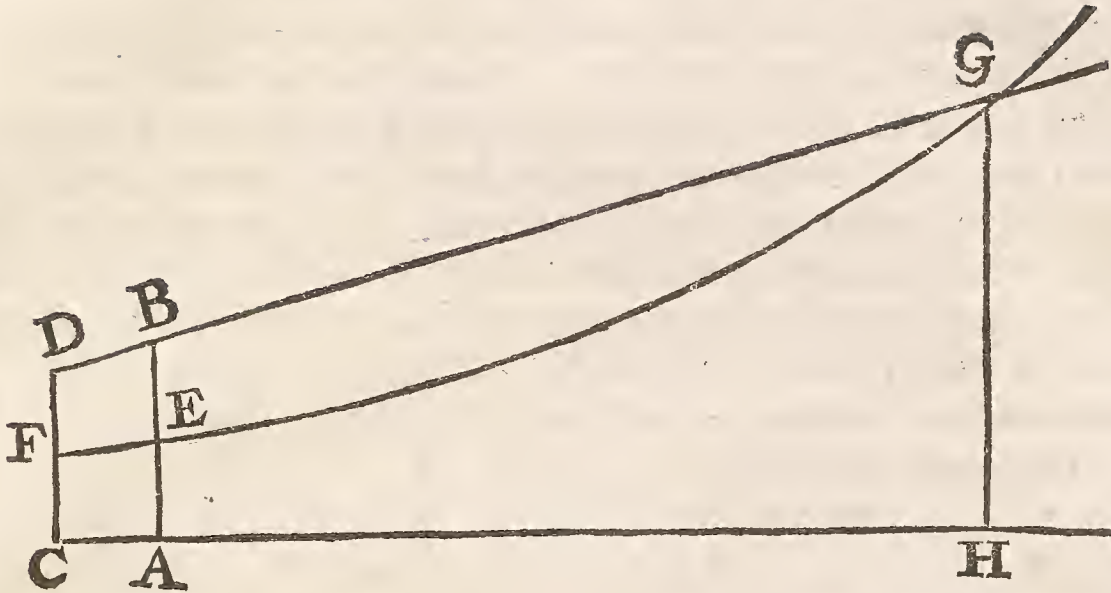
a	\propto	6	c	\propto	5
a^3	\propto	216	c^6	\propto	25
a^9	\propto	10077696	c^4	\propto	625
a^{10}	\propto	60466176	c^8	\propto	390625
			c^9	\propto	1953125

$$a^9 \propto 10077696 < 10937500 \propto 28 \text{ in } 390625 \propto 2c + 18b, c^8,$$

$$a^{10} \propto 60466176 > 58593750 \propto 30 \text{ in } 1953125 \propto 2c + 20b, c^9.$$

quare cum nona potestas ipsius a adhuc deficiat, decima verò excedat potestatem ipsius c uno gradu inferiorem & dictâ ratione multiplicatam, colligi debet, novem jactus nondum sufficere, at jactibus decem cum lucto suscipi posse, ut unâ tesserâ bis senarius jaciatur.

Idem



Idem etiam per constructionem Geometricam non inconcinnam obtinere licet, ope Curvæ quam vocant Logarithmicæ: Insistat axi CH Logarithmica quævis FEG, cui applicentur rectæ AE & CF, quæ sint in ratione a ad c , producendæ ad duplam longitudinem in B & D; & agatur recta DB, occurrens curvæ in G: sumtâ pro unitate CA, abscindet demissa applicata GH in axe portionem $CH \propto n$, numero jactuum, quo aliquid bis præstandum suscipi potest. Et quemadmodum hoc consecuti sumus occurfu lineæ rectæ & logarithmicæ: sic numerum jactuum, quo quid ter præstandum potest suscipi, per intersectionem Parabolæ & logarithmicæ; & quo id quater sæpiusve, ejusdem & altioris gradatim curvæ algebraicæ ope definire licet.

Cæterum possemus & hîc, uti fecimus in præced. Propos. materiam hanc prosequi ulterius & investigare fortes plurium Aleatorum, qui singuli æquali an inæquali numero jactuum consecutivè instituendorum susciperent aliquid præstare aliquoties; aliasque plures ejusmodi quæstiones formare; nisi & brevitati consulendum, & Lectoris industriæ quædam relinquenda esse viderentur.

Unicum tamen, ne hætenùs dicta sinistrè acciperentur, monere adhuc operæ pretium duximus: nempe, Problemata hujus & præcedentis Propositionis, ubi quæritur expectatio ejus, qui aliquot aleæ jactibus quippiam semel vel aliquoties præstandum suscipit, ita esse

esse intelligenda, ut sensus sit, etiam tum lucraturum qui suscepit, si sæpius quam suscepit præstiterit. Nam si sensus esset, eum hoc casu perditurum, aliud foret Problema, & aliæ nascerentur expectationes, quæ quia in sequentibus usum habebunt, determinandæ nobis supersunt, priusquam hinc discedamus. Ut autem generalior fiat solutio, ponamus non in omnibus aleis æquè multos regnare casus, uti hucusque supposuimus, sed numerum eorum in diversis jactibus utcunque variare, vocando in jactu *Pr. Sec. Tert. Quart. Quint.*

Num. casuum omnium	-	-	-	<i>a.</i>	<i>d.</i>	<i>g.</i>	<i>p.</i>	<i>s.</i>
eorum quib. quid præstatur	-	-	<i>b.</i>	<i>e.</i>	<i>h.</i>	<i>q.</i>	<i>r.</i>	<i>t.</i>
- - - non præstatur	-	-	<i>c.</i>	<i>f.</i>	<i>i.</i>	<i>v.</i>	<i>u.</i>	

quo posito, si aliquot aleæ jactus, putà quinque sint instituendi, & quærat expectatio ad id præstandum in nonnullis horum jactuum, ex. gr. in tribus primis, & non præstandum in reliquis; considerare oportet, quòd quilibet *b* casuum primi jactus conjungi possit cum quolibet *e* casuum secundi, & inde resultantium casuum *be*; quilibet rursus cum quolibet *h* casuum tertii, quod facit *bh* casus; & pari modo, quòd quilibet *r* casuum quarti jactus conjungi possit cum quolibet *u* casuum quinti, quod casus suppeditat *ru*; hinc cum & horum singuli cum quolibet priorum *bh* combinari queant, erit numerus omnium casuum quibus contingere potest, ut in primis tribus jactibus præstetur præstandum, in postremis duobus non præstetur, *bhr*; & quia ob similem rationem numerus omnium omnino casuum in universis quinque jactibus est *adgps*, sequitur expectationem quæsitam per 1. Cor. 3. fore $\frac{bhr}{adgps}$. unde talis formatur

Regula

pro cognoscendâ forte Aleatoris, cui plures aleæ jactus concessi,
& qui præcisè in certis quibusdam, non aliis jactibus quippiam præstare tenetur.

Productum continuum ex numeris casuum, quibus quid præstatur in jactibus, in quibus præstari debet, & eorum quibus non præstatur, ubi non præstari debet, dividatur per productum conti-

continuum ex numeris omnium casuum in jactibus universis ; & quotiens exhibebit quæsitum.

Coroll. 1. Si iidem numeri casuum regnent in omnibus aleis, hoc est, si singuli $d, g, p, s \propto a$; singuli $e, b, q, t \propto b$; & singuli $f, i, r, u \propto c$: expectatio inventa $\frac{behru}{adgps}$ vertetur in hanc $\frac{b^3 c^2}{a^5}$; &

generalius in $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, sumto n pro numero omnium jactuum, &

m pro numero eorum, in quibus præstandum præstari debet.

Cor. 2. Si iidem numeri casuum regnent in omnibus aleis, & determinatus etiam sit numerus alearum seu jactuum, quibus quid præstari debet ; ipsi verò jactus non sint definiti, sed quomodolibet accipiendi ; putà, si 5 jactus sint instituendi, & in tribus eorum quibuslibet quid præstandum sit, patet hinc quantitatem expectationis inventam toties adhuc multiplicari, quoties ex jactibus quinque diversimodè terni, h. e. generaliter, ex n rebus diversæ m res accipi possunt. Potest autem hoc fieri, per Combinationum doctrinam

seq. part. tradendam, $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots n-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m}$ sive (quòd perinde) $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n-m}$ vicibus : quare nunc expectatio

assumpientis valebit $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots n-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m}$, $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, vel

$\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \dots m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n-m}$, $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$.

PROPOSITIO XIII.

SI cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam ; at ille, si denarius obtingat ; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus : Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

F 3

Quo-

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cui-
 N que nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verum si id non obtingat, habeo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per II. Propositionem, tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$, & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per II. Propositionem,
 O tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

Annotat.

N *Verum si id non obtingat, habeo 6 casus &c.]* Auctor prius quærit expectationem ejus, qui 6 habet casus ad vincendum & 3 ad perdendum, quæ expectatio est $\frac{2}{3}a$; eâque demum mediante infert quæsitum: sed potest idem quoque non cognitâ illâ expectatione immediatè concludi; nam 27 casus ad $\frac{1}{2}a$, 6 casus ad a , & 3 ad 0, quos habeo si propositâ conditione ludo, etiam tantundem valent per I. Coroll. 3, ac $\frac{13}{24}a$; uti quoque 27 casus ad $\frac{1}{2}a$, 3 ad a , & 6 ad 0, quos habet collusor meus, ei per idem Cor. fortem pariunt $\frac{11}{24}a$.

O *Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.]* Residuum nempe totius depositi. Quia enim ambo simul finito lusu infallibiliter totum depositum, nec plus nec minus, impetramus, hinc etiam amborum simul expectatio per Axioma nostrum integrum depositum exhaurire debet, uti quoque in Propos. IV. ad literam C notavimus. Secus foret, si qui casus darentur, quibus & alii de deposito participarent; veluti, si postrema conditio lusui annexa juberet, ut id quod depositum est in pauperes erogetur; tum enim propter 6 casus ad a , & 30 ad 0, non nisi haberem $\frac{1}{6}a$; & collusor propter 3 casus ad a , & 33 ad 0, tantum haberet $\frac{1}{12}a$; residuum verò depositi $\frac{3}{4}a$ pauperibus deberetur, qui propterea & ipsi in rationem fortis venire censendi essent.

P R O P O S I T I O X I V .

SI ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hac conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille verò quàm primùm senarium jaciatur; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipsius fortem.

Ponatur, fortem meam valere x , & id quod depositum est vocari a ; eritque fors alterius $\infty a - x$. Et patet, quodcumque ipsius vices jaciendi revertuntur, fortem meam tum rursus debere esse ∞x . At quodcumque meæ vices sunt ut jaciam, fors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y . Jam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lusibusque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promouent: habeo, priusquam jactit, 5 casus ad obtinendum 0, & 31 casus ad obtinendum y . id quod per III. Propositionem valet $\frac{31y}{36}$.

Posuimus autem casum meum à principio esse ∞x . Quocirca erit $\frac{31y}{36} \infty x$, adeoque $y \infty \frac{36x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, fortem meam valere y . Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a , quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x . id quod per III. Propositionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum sit ∞y , erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty y$, $\frac{30x + 6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ fortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio fortis meæ ad illius fortem sit, ut 31 ad 30.

Annotat.

Auctor in hoc Problemate primùm adhibere cogitur analytisin algebrai-

algebraicam, cum in præcedentibus solâ synthesi usus fuisset: cujus differentiæ ratio est, quòd in illis omnibus expectatio quæsitâ fluebat ex aliis expectationibus vel in totum cognitis & datis, vel incognitis quidem, at naturâ prioribus ac simplicioribus, & quæ ab hâc vicissim non dependebant; quapropter incipiendo ab omnium simplicissimis earum ope gradatim pergere poterat ad enodandos alios casus magis magisque compositos absque analysi ullâ. Secus verò se hîc res habet; nam expectationem meam, quam possideo cum collusorem ordo jaciendi tangit, Auctoris more æstimare non possum, nisi cognitam habuero sortem, quam acquirò ubi vices jaciendi ad me devolvuntur: sed & hanc cognoscere nequeo, nisi priorem illam compertam habeam, quæ tamen ea ipsa est quam quærere intendo; unde cum utraque sit incognita, & altera ab alterâ vicissim dependeat, non possunt Auctoris vestigiis insistendo aliter quàm analyticos ope ex se mutuò elici: id quod operæ pretium est observâsse, ut utriusque methodi discrimen, & quando hæc illave in usum vertenda sit, perspicuò aliquo exemplo pateret.

Dixi, Auctoris vestigiis insistendo non posse; datur enim adhuc aliâ peculiaris via, quâ quæsitum consequi possum citra analysin ullam, & quam in sequentibus quoque utiliter adhibere licet. Fingamus loco duorum alternatim ludentium infinitos Collusores, quibus singulis ordine uni post alterum singuli tantum concedantur jactus, eâ lege, ut cui collusorum in locis imparibus senarius, aut cui in paribus septenarius primùm evenerit, ille vincat atque depositum auferat: quo pacto liquet, secundum collusorem vincere non posse, nisi duorum primorum jactuum solus posterior præstet quod præstare debet; nec tertium victoriâ potiri posse, nisi trium primorum jactuum solus tertius id præstet; nec quartum, nisi quatuor primorum solus quartus, & ita consequenter. Quare, si pro 5 & 31, numeris casuum quibus in tesseriis duabus evenire potest senarius vel non evenire, ponamus b & c ; item pro 6 & 30 numeris casuum, quibus septenarius obtingere vel non obtingere potest, e & f ; pro 36 verò numero omnium casuum $b+c$, vel $e+f$, scribamus a : inveniemus per Regulam in fine annot. Prop. XII. traditam singulorum Collusorum expectationes, ut sequitur:

Collus.

Colluf. I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. &c.

Expect. $\frac{b}{a} \cdot \frac{ce}{aa} \cdot \frac{bcf}{a^3} \cdot \frac{cccf}{a^4} \cdot \frac{bccff}{a^5} \cdot \frac{c^3eff}{a^6} \cdot \frac{bc^3f^3}{a^7} \cdot \frac{c^4ef^3}{a^8} \cdot \&c.$

Quòd si nunc in primi, tertii, quinti & reliquorum imparibus numeris designatorum Colluforum locum unum solum mente substitutam, meque ipsum in locum secundi, quarti, sexti, & cæterorum, qui in pari graduum numero sunt collocati, constabit hunc ipsum fore casum præsentis quæstionis, atque insuper expectationes utriusque nostrum æquari debere expectationibus simul sumtis omnium illorum colluforum, in quorum locum suffecti sumus.

Sors itaque mea exprimetur per $\frac{ce}{aa} + \frac{cccf}{a^4} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^4ef^3}{a^8} \&c.$

& colluforis mei fors per $\frac{b}{a} + \frac{bcf}{a^3} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^3}{a^7} \&c.$ series

scil. infinitas quantitatum geometricè progredientium in ratione aa ad cf , & quarum prior summam conficit $\frac{ce}{aa - cf}$, posterior $\frac{ab}{aa - cf}$; sic ut fors mea ad sortem illius se habeat, ut ce ad ab , seu restitutis valoribus lit. a, b, c & e , ut 31 ad 30, planè ut suprà.

A P P E N D I X.

Coronidis loco Auctor Tractatui suo subjunxit sequentia quinque Problemata, sed omiffa analysi vel demonstratione, quam Lectori eruendam reliquit. Hanc itaque nos partim hic supplere, partim in Librum secundum rejicere coacti sumus.

P R O B L E M A I.

A & B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primò unum jactum instituat; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio fortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276.

G

Solu-

Solutio : Ponamus, sortem ipsius A valere t , tum cum lude-
re incipit; at cum ordo jaciendi collusorem B tangit, x : cum B
semel lusit, y : cum bis, hoc est, cum ludendi vices ad ipsum A
redeunt, z . Quoniam enim omnes istæ sortes differentes sunt &
incognitæ, earumque præcedens quælibet à sequente & postrema
vicissim à primâ dependet, uti ex subjunctâ operatione constabit,
non poterit Problema istud Auctoris saltem methodo, per ea quæ
ad Propos. ult. annotata sunt, aliter quàm mediante analysi alge-
braicâ expediri. Primò itaque quia in 36 jactibus duarum tessera-
rum reperiuntur 5, qui ipsi A senarium dare, eumque ludi victo-
rem reddere possunt; & 31 jactus, qui ordinem jaciendi in collu-
sorem B transferunt; habebit A, tum cum ludum inchoat, 5 ca-
sus ad obtinendum a (id quod depositum est) & 31 ad obtinen-
dum x ; id quod per sæpiùs laudatam Propos. valet $\frac{5a+31x}{36}$: cum
autem eadem à principio fors vocata fuerit t , erit propterea $t \propto$
 $\frac{5a+31x}{36}$. Deinde cum ordo ludendi tangit collusorem B, habet
A 6 casus ad obtinendum nihil (quandoquidem 6 sunt jactus 7
punctorum, qui adversario ejus favent) & 30 casus ad acquiren-
dum y , quod sortem ipsi parit $\frac{5}{6}y$. Eademmet verò fors suprâ
nobis dicta fuit x ; quare $x \propto \frac{5}{6}y$. Porro cum collusor B, abso-
luto primo jactu alterum aggressurus est, habet A ob eandem ra-
tionem 6 casus ad 0, & 30 ad sortem sequentem z ; & siquidem
obtinere tum etiam supponatur y , erit $y \propto \frac{5}{6}z$. Denique vicibus
ludendi ad ipsum A revertentibus, quo casu ejus expectationem z
vocamus, habet is 5 casus ad a , si nempe senarium jaciat, & 31
casus ad obtinendam sortem pristinam t , si secùs eveniat; quan-
doquidem tunc collusores in eo statu erunt, in quo fuerant à prin-
cipio, dum ipsi A unus superest jactus, quem excipere debent duo
jactus à B instituendi, & hos duo alii ab A, atque ita deinceps,
omnino sicut ab initio: constat autem 5 casus ad a , & 31 ad t va-
lere $\frac{5a+31t}{36}$; quocirca $z \propto \frac{5a+31t}{36}$. Inventis hâc ratione tot
æquationibus, quot suppositæ fuerunt literæ incognitæ, oportet à
postremis ad primas retrogredi, substituendo valorem z per ulti-
mam

nam repertum in proximè præcedente, ut habeatur $y \propto \frac{25a + 155t}{216}$;
 & hunc valorem in antepenultimâ, ut fiat $x \propto \frac{125a + 775t}{1296}$; ac
 tandem valorem istum in primâ; quâ ratione fors quæsitâ habetur
 $t \propto \frac{10355a}{22631}$, & relinquetur pro sorte collusoris B $\frac{12276a}{22631}$. unde fors
 A ad sortem B erit, ut 10355 ad 12276; uti Auctor invenit.

Idem verò etiam aliquantò compendiosius investigari potest,
 adhibitis tantùm tribus literis incognitis t , x & z , prætereundo
 sortem y , quam acquirit A, postquam B uno jactu defunctus est.
 Ex Annot. Propos. XI. constat, quòd fors ejus, qui duobus jacti-
 bus semel septenarium jacere susciperet, esset $\frac{11}{36}$ depositi (quippe
 cum a numerus omnium jactuum, ad c numerum eorum quibus
 non obtinetur septenarius, est in ratione 6 ad 5; & propterea
 $\frac{aa - cc}{aa} \propto \frac{11}{36}$) unde, per ea quæ ibid. ad lit. I. monuimus, con-
 cludendum, 11 esse casus, quibus collusor B ludendi vicibus ad se
 devolutis alterutro suorum jactuum septenarium jaciât & vincat,
 ipseque A nihil acquirat; & 25 alios, quibus id neutro jactuum
 præstet, ludendique ordo inde ad A reversus huic sortem z pariat;
 id quod ipsi A, qui eo statu possidere supponitur x , tantundem
 valet ac si haberet $\frac{25z}{36}$; adeò ut $x \propto \frac{25z}{36}$. Cæteris enim positis
 ut priùs, si valor ipsius z supra inventus hîc substituatur, invenie-
 tur ut ibi $x \propto \frac{125a + 775t}{1296}$, & consequenter $t \propto \frac{10355a}{22631}$.

Atque hinc perspicitur methodus Auctoris, quam imitari con-
 venit in omnibus similibus fortitionibus & ludis aleæ, in quibus
 plures continuò sortes incognitæ se mutuò excipiunt, dummodò
 post jactus aliquot pristina recurrat rerum facies, eademque rever-
 tantur sortes incognitæ, quas aleatores ab initio ludi habuère.
 Sed non tam facilè apparet, quo pacto illa Problemata tractanda
 sint, in quibus ludum prosequendo sortes nunquam in orbem re-
 deunt, sed subinde aliæ novæ prodeunt à prioribus diversæ & æquè
 ignotæ, idque in infinitum; cujusmodi quidem nulla in hoc Aucto-
 ris Tractatu habentur. Eorum aliqua proposui olim in Ephemer.

Erud. Gall. 1685. art. 25, spe fretus fore, ut nonnemo illorum solutionem aggredi dignaretur, quam cum toto quinquennio nemo dedisset, ipsemet postea in Actis Erud. Lips. m. Maj. 1690. communicavi, secuto mox etiam fundamento solutionis ab ingeniosissimo Leibnitio ibid. m. Jul. ejusdem anni occultius exhibito, quod ego nunc apertius exponam. Prius autem ostendam, quo pacto per illud præsens Auctoris Problema solvatur; nec enim differt hoc fundamentum ab eo, quo ad solutionem quoque præced. Propos. in annotat. fui usus, eademque promiscuè facilitate applicatur ad quæstiones, in quibus eadem perpetuè expectationes in circumlum redeunt, & in quibus nulla talis earum datur apocatastasis, hoc solo discrimine, quod in prioribus ad series infinitas unam pluresve, quarum summæ unâ aliquâ quantitate exprimi possunt; in posterioribus verò ad alias series haud æquè summabiles nos deducat.

Supponamus infinitos lusores, qui singuli ad singulos successive jactus admittantur, & quorum primus, quartus & quintus, octavus & nonus, & sic porrò intermissis duobus semper duo sequentes, senarii jactu: cæteri, secundus & tertius, sextus & septimus &c. septenarii jactu vincere possint. Ac tum per Regulam annot. Prop. XII. annexam quærantur singulorum expectationes, quæ sumto valore lit. a, b, c, e & f , ut in annot. præc. Prop. ita habebunt:

<i>Coll.</i>	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	&c.
	A.	B.	B	A	A	B	B	A	A	B	B	A	
<i>Exp.</i>	$\frac{b}{a}$	$\frac{ce}{aa}$	$\frac{cef}{a^3}$	$\frac{bcff}{a^4}$	$\frac{bccff}{a^5}$	$\frac{c^3eff}{a^6}$	$\frac{c^3ef^3}{a^7}$	$\frac{bc^3f^4}{a^8}$	$\frac{bc^4f^4}{a^9}$	$\frac{c^5ef^4}{a^{10}}$	$\frac{c^5ef^5}{a^{11}}$	$\frac{bc^5f^6}{a^{12}}$	&c.

substitutis igitur in locum omnium eorum, qui senario vincunt, uno solo collusore A; & in locum eorum, qui septenario vincunt, uno solo B, habebimus casum præsentis Problematis, indeque con-

cludemus, sortem ipsius A fore $\frac{b}{a} + \frac{bcff}{a^4} + \frac{bccff}{a^5} + \frac{bc^3f^4}{a^8} + \frac{bc^4f^4}{a^9}$
 $+ \frac{bc^5f^6}{a^{12}}$ &c. & sortem ipsius B, $\frac{ce}{aa} + \frac{cef}{a^3} + \frac{c^3eff}{a^6} + \frac{c^3ef^3}{a^7} + \frac{c^5ef^4}{a^{10}}$
 $+ \frac{c^5ef^5}{a^{11}}$ &c. Et quia in utrâque hâc serie termini locorum tum

parium

parium tum imparium separatim accepti Geometricas progressionem
constituunt decrecentes in ratione $\frac{ccff}{a^4}$, liquet hinc etiam ambarum
summas in potestate haberi. Reperitur autem summa prioris seriei
 $\frac{a^3b + bcff}{a^4 - ccff}$, & posterioris $\frac{aace + acef}{a^4 - ccff}$; sic ut ratio fortis A ad for-
tem B sit, ut $a^3b + bcff$ ad $aace + acef$, hoc est (factis
 $a \infty 36, b \infty 5, c \infty 31, e \infty 6, \& f \infty 30$) ut 372780 ad 441936,
seu ut 10355 ad 12276, prorsus ut supra.

Sequuntur nunc exempla talium quaestionum, ubi nulla datur
fortium apocatastasis: Sint duo Collusores A & B certatim luden-
tes duabus tesseris eâ lege, ut qui primus septenarium jecerit vin-
cat. Quærentur eorum expectationes, si ludere debeant hoc or-
dine

- I. A semel, B semel, A bis, B semel, A ter, B semel, A quater, B semel &c.
- II. A semel, B semel, A semel, B bis, A semel, B ter, A semel, B quater &c.
- III. A semel, B semel, A bis, B bis, A ter, B ter, A quater, B quater &c.
- IV. A semel, B bis, A ter, B quater, A quinquies, B sexies, A septies &c.

Hic methodus analytica Auctoris nil proficit, sed mea, eâdem quâ
anteâ facilitate quaesitum determinat. Loco duorum alternis luden-
tium A & B fingo rursus lusores infinitos, quibus singulis singuli
tantum concedantur jactus, & quaero singulorum expectationes.
Reperitur autem per Coroll. 1. Regulæ ad Prop. XII. notatæ, ob
numeros casuum a, b & c eosdem in omnibus aleis, expectatio cu-
jusvis generaliter $\frac{b^m c^{n-m}}{a^n}$, ubi m numerus jactuum, quibus se-

ptenarius (unus b casuum) præstandus est, perpetuò valet 1; & n
numerus omnium ab initio jactuum successivè valet 1, 2, 3, 4 &c.
his ergò substitutis sequens nascetur laterculus

Coll. I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX. X. XI. XII. XIII. XIV. XV. &c.

A B B A A A B B B B A A A A

Exp. $\frac{b}{a} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot \frac{bcc}{a^3} \cdot \frac{bc^3}{a^4} \cdot \frac{bc^4}{a^5} \cdot \frac{bc^5}{a^6} \cdot \frac{bc^6}{a^7} \cdot \frac{bc^7}{a^8} \cdot \frac{bc^8}{a^9} \cdot \frac{bc^9}{a^{10}} \cdot \frac{bc^{10}}{a^{11}} \cdot \frac{bc^{11}}{a^{12}} \cdot \frac{bc^{12}}{a^{13}} \cdot \frac{bc^{13}}{a^{14}} \cdot \frac{bc^{14}}{a^{15}} \cdot \&c.$

tum loco horum collusorum repono duos A & B, utrique ea assi-
gnando loca, quæ juxta quaestionis tenorem illi competunt, tan-

demque expectationes omnes his locis respondentes summam col-
 ligo, ad constituendas expectationes totales utriusque. Sic quia
 juxta conditionem exempli 4^{ti} ipsi A debetur jactus primus, dein-
 de 4^{tus}, 5^{tus}, 6^{tus}, porro 11, 12, 13, 14, 15^{tus}, & sic deinceps,
 hinc expectationes collusorum his numeris designatorum, primi,
 4^{ti}, 5^{ti}, 6^{ti} &c. in peculiarem seriem compingo; atque expecta-
 tiones 2^{di}, 3^{tii}, 7^{mi}, & reliquorum, in quorum locum B succedit,
 in aliam seriem; quo pacto fiet fors ipsius A $\propto \frac{b}{a} + \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^4}{a^5} +$
 $\frac{bc^5}{a^6} + \frac{bc^{10}}{a^{11}} + \frac{bc^{11}}{a^{12}} + \frac{bc^{12}}{a^{13}} + \frac{bc^{13}}{a^{14}} + \frac{bc^{14}}{a^{15}} + \&c.$ & fors ipsius B $\propto \frac{bc}{aa} +$
 $\frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^6}{a^7} + \frac{bc^7}{a^8} + \frac{bc^8}{a^9} + \frac{bc^9}{a^{10}} + \frac{bc^{15}}{a^{16}} + \frac{bc^{16}}{a^{17}} + \frac{bc^{17}}{a^{18}} + \&c.$ indeque por-
 rò, eliminando b ubique, & ejus loco surrogando $a - c$, fors A $\propto 1 -$
 $\frac{c}{a} + \frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6} + \frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}} \&c.$ ut & fors B $\propto \frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3} + \frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}} + \frac{c^{15}}{a^{15}} \&c.$
 prioris complementum ad unitatem.

Idem adhuc aliter ita elicio: Pono denuò loco duorum A &
 B, infinitos lufos A, B, C, D, E, F, G, &c. sed unicuique eo-
 rum tot jactus continuè instituendos tribuo, quot pro tenore quæ-
 stionis conceduntur alterutri A vel B, quoties ludendi ordo de no-
 vo ipsum tangit. Verbi gratiâ, in exemplo antè allato quarto,
 pro eo quòd A ludere debet semel, B bis, hinc iterum A ter, B
 quater &c. concipio A ludere debere semel, B bis, alium C ter,
 alium D quater &c. tum separatim uniuscujusque sortem investi-
 go, attendendo ad numerum jactuum cum ab ipso instituendorum,
 tum etiam ab iis simul omnibus, qui eum ludendo præcedere de-
 bent; quod nullo negotio fit, postquam jam supra in annotatis
 Propof. XI. (positis illorum numero n & horum s) sortem hanc

generaliter ostendimus esse $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^n + s} \propto \frac{c^s}{a^s} - \frac{c^{n+s}}{a^{n+s}}$; sumtis

enim in 4^{to} exemplo pro n ordine numeris 1, 2, 3, 4 &c. & pro
 s numeris 0, 1, 3, 6, 10 &c. ceu summis ipsorum 1, 2, 3, 4 &c.
 ab initio collectis, emergent statim singulorum sortes, ut sequitur

Colluf.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	&c.
Sortes:	$1 - \frac{c}{a}$	$\frac{c}{a} - \frac{c^3}{a^3}$	$\frac{c^3}{a^3} - \frac{c^6}{a^6}$	$\frac{c^6}{a^6} - \frac{c^{10}}{a^{10}}$	$\frac{c^{10}}{a^{10}} - \frac{c^{15}}{a^{15}}$	$\frac{c^{15}}{a^{15}} - \frac{c^{21}}{a^{21}}$	$\frac{c^{21}}{a^{21}} - \frac{c^{28}}{a^{28}}$	&c.

quo

quo facto nil superest aliud, quàm ut omnium lusorum in locis imparibus A, C, E, G &c. nec non omnium in paribus B, D, F &c. expectationes in unam summam colligantur ad producendas, quas antea, expectationes unius A & unius B alternatim ludentium, utpote quas summis illis æquari debere quivis per se videt. Nec differret operatio, si tres, quatuor pluresve collutores, in quæstione supponerentur.

Utrovīs autem horum modorum etiam cæterarum quæstionum exempla solvuntur. Solutiones omnium sic habent (sumto compendii gratiâ $m \infty \frac{c}{a}$:

In qu. I. fors. A $\infty 1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9 - m^{13} + m^{14} - m^{19} + \&c.$
 B $\infty + m - m^2 + m^4 - m^5 + m^8 - m^9 + m^{13} - m^{14} + m^{19} - \&c.$
 II . . A $\infty 1 - m + m^2 - m^3 + m^5 - m^6 + m^9 - m^{10} + m^{14} - m^{15} + \&c.$
 B $\infty + m - m^2 + m^3 - m^5 + m^6 - m^9 + m^{10} - m^{14} + m^{15} - \&c.$
 III . . A $\infty 1 - m + m^2 - m^4 + m^6 - m^9 + m^{12} - m^{16} + m^{20} - m^{25} + \&c.$
 B $\infty + m - m^2 + m^4 - m^6 + m^9 - m^{12} + m^{16} - m^{20} + m^{25} - \&c.$
 IV . . A $\infty 1 - m + m^3 - m^6 + m^{10} - m^{15} + m^{21} - m^{28} + m^{36} - m^{45} + \&c.$
 B $\infty + m - m^3 + m^6 - m^{10} + m^{15} - m^{21} + m^{28} - m^{36} + m^{45} - \&c.$

Singulæ hæ sortes exprimuntur, ut videre est, per seriem aliquam infinitam, in quâ signa + & - perpetuò alternant, & cujus termini ex serie hâc continuè proportionalium 1. m. m². m³. m⁴. m⁵ &c. per saltus inæquales sunt excerpti, quod impedit illius summationem absolutam; Sed facilis est approximatio in numeris quantumlibet exactis. Sic positis a $\infty 36$, numero omnium casuum in tesseris duabus, & c $\infty 30$ numero eorum quibus non obtinetur præscriptus septenarius, adeoque $\frac{c}{a}$ seu $m \infty \frac{30}{36} \infty \frac{5}{6}$, reperitur fors ipsius A in primo exemplo $\frac{71931}{100000}$, in 2^{do} $\frac{40058}{100000}$, in 3^{tio} $\frac{59679}{100000}$, in 4^{to} $\frac{52392}{100000}$; ubique non unâ centies millesimâ parte major minorve, ac proinde ratio fortis A, ad sortem B in 1^{mo} ut 71931 ad 28069, in 2^{do} ut 40058 ad 59942, in 3^{tio} ut 59679 ad 40321, in 4^{to} ut 52392 ad 47608.

Cæterùm qui examinabit indices potestatum quantitatis m, quæ

quæ terminos harum serierum constituunt, deprehendet illorum differentias ubique coincidere cum ipsis numeris jactuum, qui collusoribus A & B juxtâ quæstionis tenorem alternatim instituendi sunt: Ita in primâ serie $1 - m + m^2 - m^4 + m^5 - m^8 + m^9$ &c. indices potestatum ordine sunt 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 &c. & indicum differentiæ 1, 1, 2, 1, 3, 1 &c. præcisè respondentes numeris jactuum, quos hypothesis primæ quæstionis requirit, quippe quæ ipsi A 1, B 1, A 2, B 1, A 3, B 1 &c. jactus ordine tribuit. Operæ pretium autem est observare, hoc aded generale esse, ut etiam valeat in iis exemplis, in quibus duobus alternatim ludentibus numeri jactuum assignantur, quales fortuitò è calamo scribentis fluere possunt, nullâ certâ & constante ratione progredientes; cùm ista consideratio regulam nobis suppeditet amborum sortes momento exhibendi, quæ talis:

Regula pro cognoscendâ sorte duorum certatim ludentium, donec alteruter eorum vincat, quando utrique alternis vicibus aliquot alea jactus continuè instituendi conceduntur secundùm quosvis numeros datos & in infinitum continuatos.

(Pono autem eosdem regnare numeros casuum seu eundem manere valorem quantitatis $\frac{c}{a}$ vel m in omnibus aleis.)

Scribantur ordine primò dati numeri jactuum utrique concessorum, dein summæ eorum ab initio collectæ; tum summæ hæ fiant indices totidem potestatum quantitatis m , quibus per signa $+$ & $-$ alternatim connexis habetur expectatio primi ludentis; omisâ verò unitate quæ semper primus seriei terminus est, signisque cæterorum inversis habetur expectatio collusoris. Ex, gr. Si alternatim instituere jubeantur, ipse A jactus tres, B unum, A 4, B 1,

B 1, A 5, B 9, & sic deinceps in infinitum, putà secundùm numeros Cyclometricos Ludolfi, qui nullâ determinatâ lege progrediuntur, erunt ordine numeri jactuum -- 3 1 4 1 5 9 2 6 5 &c. horumque summæ ab initio collectæ, 0, 3, 4, 8, 9, 14, 23, 25, 31, 36, &c. ac proinde fors ipsius

$$A, 1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36} + \&c.$$

$$B, + m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31} + m^{36} - \&c.$$

Nota, si numerus omnium jactuum sit limitatus, ultra quem etsi neuter adhuc vicerit ludere prohibeantur, eadem regula valebit, nisi quoddam ultimus terminus, cujus exponens ex omnium jactuum summâ conflatur, in illâ serie in quâ signum + habet redundat, adeoque abjiciendus, quo fit, ut expectationes amborum simul sumptæ eodem illo termino deficiant ab unitate. Sic in præced. exemplo si post ultimò adscriptum quinarium, h. e. post jactum 36^{um} esset subsistendum, fieret

$$\text{fors A, } 1 - m^3 + m^4 - m^8 + m^9 - m^{14} + m^{23} - m^{25} + m^{31} - m^{36}.$$

$$\text{fors B, } + m^3 - m^4 + m^8 - m^9 + m^{14} - m^{23} + m^{25} - m^{31}.$$

adeoque amborum simul $1 - m^{36}$.

P R O B L E M A I I.

TRes Collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penès A, secunda penès B, & tertia penès C, & tum sequens rursus penès A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum fortium?

Sensus hujus Problematis ambiguus est, unde variis quoque solutionibus locus. Vel enim supponitur, electos calculos post singulas electiones in urnam recondendos esse, priusquàm sequens eligit, sic ut numerus eorum perpetuò maneat idem; vel non esse recondendos, sic ut eorum numerus continuò decrescat: deinde

H

suppo-

supponi potest, vel à singulis assumptos esse 12 calculos, vel ab universis in commune.

I. Si calculi post singulas electiones sint recondendi (quod quidem sensu nil interest, sive in commune seu à singulis 12 calculi assumpti fuerint) quæsitæ collusorum sortes hâc ratione investigantur:

1. *Methodo Auctoris.* Vocetur fors primi x , secundi y , tertii z . Jam primus A cùm ludere incipit, 4 habet casus ad vincendum seu obtinendum depositum, (ob 4 calculos albos), & 8 casus (ob 8 nigros), quibus perdit suam præcedentiam & transfertur in statum tertii, adeoque acquirit sortem z ; quod valet $\frac{4+8z}{12}$. $\propto \frac{1+2z}{3}$; ac proinde fors primi $x \propto \frac{1+2z}{3}$. Ob eandem rationem habet secundus B, cùm primus ludum inchoat, 4 casus ad obtinendum nihil, & 8 casus ad acquirendam præcedentiam, quâ transfertur in statum primi acquiritque sortem x ; quod valet $\frac{8}{12}x \propto \frac{2}{3}x$, quare secundi fors $y \propto \frac{2}{3}x$. Pariter quoque tertius C à principio habet 4 casus ad nihilum, & 8 ad obtinendum secundum eligendi locum sive secundi sortem y ; quod tantundem est ac $\frac{2}{3}y$; quocirca tertii fors $z \propto \frac{2}{3}y$, hoc est, $y \propto \frac{3}{2}z$; & quia y etiam reperta fuit $\propto \frac{2}{3}x$, habetur $\frac{3}{2}z \propto \frac{2}{3}x$, hoc est, $z \propto \frac{4}{9}x$, qui valor ipsius z in primâ æquatione $x \propto \frac{1+2z}{3}$ substitutus exhibet $x \propto \frac{1}{3} + \frac{8}{27}x$, hoc est, $x \propto \frac{9}{19}$: unde porrò invenitur y ($\frac{2}{3}x$) $\propto \frac{6}{19}$; & z ($\frac{2}{3}y$) $\propto \frac{4}{19}$; ac propterea ratio sortium x, y & z , ut 9. 6. 4.

2. *Methodo nostrâ.* Posito generaliter calculorum omnium numero a , alborum b , nigrorum c , concipiantur, ut jam sæpius factum, infiniti collusores, qui præscriptâ conditione ludant, unusque post alterum calculum educat & reponat; erunt rursus per Cor. 1. Reg. ad Prop. XII. exhibitæ propter invariata manentem in omnibus electionibus alborum & nigrorum numerum, expectationes singulorum collusorum sequentes:

Coll. I. II. III. IV. V. VI. VII. VIII. IX. X. XI. XII. XIII. XIV. XV. &c.
 A B C A B C A B C A B C A B C

Exp. $\frac{b}{a} \cdot \frac{bc}{aa} \cdot \frac{bcc}{a^3} \cdot \frac{bc^3}{a^4} \cdot \frac{bc^4}{a^5} \cdot \frac{bc^5}{a^6} \cdot \frac{bc^6}{a^7} \cdot \frac{bc^7}{a^8} \cdot \frac{bc^8}{a^9} \cdot \frac{bc^9}{a^{10}} \cdot \frac{bc^{10}}{a^{11}} \cdot \frac{bc^{11}}{a^{12}} \cdot \frac{bc^{12}}{a^{13}} \cdot \frac{bc^{13}}{a^{14}} \cdot \frac{bc^{14}}{a^{15}} \cdot \&c.$

unde cum per hypoth. prima, 4^{ta}, 7^{ma}, 10^{ma} &c. electiones sint penes A; 2^{da}, 5^{ta}, 8^{va}, 11^{ma} &c. penes B; 3^{tia}, 6^{ta}, 9^{na}, 12^{ma} &c. penes C; additis collusorum his locis respondentium expectationibus in unam summam, habetur expectatio unius

$$\left. \begin{aligned} A &\propto \frac{b}{a} + \frac{bc^3}{a^4} + \frac{bc^6}{a^7} + \frac{bc^9}{a^{10}} + \frac{bc^{12}}{a^{13}} + \&c. \\ B &\propto \frac{bc}{aa} + \frac{bc^4}{a^5} + \frac{bc^7}{a^8} + \frac{bc^{10}}{a^{11}} + \frac{bc^{13}}{a^{14}} + \&c. \\ C &\propto \frac{bcc}{a^3} + \frac{bc^5}{a^6} + \frac{bc^8}{a^9} + \frac{bc^{11}}{a^{12}} + \frac{bc^{14}}{a^{15}} + \&c. \end{aligned} \right\} \text{ob progr. geom.} \left\{ \begin{aligned} &\propto \frac{aab}{a^3 - c^3} \\ &\propto \frac{abc}{a^3 - c^3} \\ &\propto \frac{bcc}{a^3 - c^3} \end{aligned} \right.$$

adeoque ratio sortium, ut $aa.ac.cc$, id est, hic (ob $a.c :: 12.8 :: 3.2$) ut $9.6.4$ ut antea. Nota, si quaestio proponeretur in collusoribus quatuor, sortes eorum eodem pacto repertum iri se habere, ut $a^3.aac.acc.c^3$; & si generaliter in collusoribus n , ut $a^{n-1}.a^{n-2}c.a^{n-3}cc.$ &c. pergendo semper in ratione continuâ a ad c .

II. Si porrò sensus Problematis sit, ut assumpti in commune calculi 12 non reponantur, postquam ex urnâ exempti fuerint; observandum est, quòd per continuam educationem calculorum nigrorum, primus quidem collusor transeat in locum tertii, tertius in locum 2^{di}, secundus in locum primi, non idcirco tamen pariter sortes, quas ab initio ludi habuere, invicem permutent, ut factum fuit in præc. hyp. sed quod subinde alias novas & à prioribus diversas ob mutatum calculorum numerum acquirant, easque tamen simpliciores quòd plures calculi nigri educti fuerint, atque ita comparatas, ut tandem desinant in sortes omnino cognititas. Quapropter incipiendo consuetâ Auctoris methodo ab omnium simplicissimis, & pergendo retrò per omnes intermedias, perveniemus ultimò solâ synthesi utendo ad casum in quaestione propositum.

Hunc in finem supponamus, eductos jam esse 7 calculos nigros, adeoque proximum eligendi locum ipsi B deberi. Sic pri-

H 2

mus

mus A nihil ampliùs expectabit ; quandoquidem reliquorum alteruter B vel C ob residuum nigrum unicum necessariò album educet & vincet. Secundus verò B ob 4. albos 4. habebit casus ad vincendum, unumque ob residuum nigrum ad perdendum ; quandoquidem si hunc eduxerit, tertius C infallibiliter vincet. Sed ob eandem rationem tertius C 4. habebit casus ad perdendum & unum ad vincendum. Unde colligimus, fortes trium A, B, C, eo casu fore $0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}$.

Supponamus deinde, eductos esse nigros sex. Sic habebunt, primus quidem A, quem proximus tunc ludendi ordo tangit, 4. casus ad vincendum, totidemque ad perdendum duo reliqui : omnes verò tres ob residuos duos nigros duos casus ad obtinendum præcedentes suas expectationes, quandoquidem altero horum educto unicus restat niger, ordoque ludendi ipsum B poscit, qui casus est præced. hypothesis. Unde fortes ipsorum nunc sunt $\frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{1}{15}$.

Fingamus porrò, eductos esse nigros quinque. Sic habebit tertius C, quem tangerent eligendi vices, ad vincendum ; reliquique duo ad perdendum 4. casus : ob residuos autem tres nigros, quivis illorum etiam 3. habet casus ad expectationem suam modò inventam. Unde jam fortes ipsorum fiunt, $\frac{2}{7}, \frac{4}{35}, \frac{3}{5}$.

Rursus si educti concipiantur nigri quatuor, sic ut æqualis alborum & nigrorum numerus superfit, erit una medietas casuum pro B, utpote penès quem tunc proxima foret electio, eademque contra A & C ; altera verò medietas omnes tres ad præcedentes expectationes promovebit. Unde nascuntur fortes $\frac{1}{7}, \frac{3}{70}, \frac{3}{10}$.

Eâdem ratione si educti sint nigri tres, inveniuntur fortes $\frac{11}{21}, \frac{13}{42}, \frac{1}{6}$.

Si nigri duo, $\frac{11}{35}, \frac{13}{70}, \frac{1}{2}$. Si niger unus, $\frac{1}{5}, \frac{53}{110}, \frac{7}{22}$.

Si denique nullus adhuc calculus eductus fuerit, quem solum casum primò intendimus, & propter quem præcedentes omnes expedire priùs oportuit, fortes collusorum A, B, C, simili modo reperiuntur $\frac{7}{15}, \frac{53}{165}, \frac{7}{33}$, five ad idem nomen reductæ $\frac{77}{165}, \frac{53}{165}, \frac{35}{165}$; sic ut optata ratio fortium sit, ut 77, 53, 35.

Methodus porrò nobis familiaris etiam in præsentè hypothesis locum

locum habet; neque enim hanc magis respuunt eae quaestiones, quae communiter solâ synthesi solvuntur, quàm quae analysi opus habent. Quoniam octo sunt calculi nigri non reponendi, postquam educti fuerint, fingo novem esse collusores, qui singuli ordine singulas electiones instituant; quo fiet ut unus eorum necessariò tandem album educat ac vincat. Nullus autem spem vincendi habere potest, nisi omnes ipsum praecedentes continuò nigros eduxerint; quocircà suppono horum numerum (cui casuum numerus proportionatur) gradatim minui, atque post primam electionem superesse calculos nigros septem, post 2^{dam} sex, post 3^{tiam} quinque, & sic deinceps; indeque singulorum collusorum fortes per Regulam Prop. XII, annexam elicio, juxta sequentem laterculum:

<i>Collus.</i>	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
	A	B	C	A	B	C
Num. omn. cal. <i>a</i>	12	11	10	9	8	7
albor. <i>b</i>	4	4	4	4	4	4
nigr. <i>c</i>	8	7	6	5	4	3
<i>Expectat.</i>	$\frac{4}{12}$	$\frac{4 \cdot 8}{11 \cdot 12}$	$\frac{4 \cdot 7 \cdot 8}{10 \cdot 11 \cdot 12}$	$\frac{4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$	$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$	$\frac{4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$

<i>Collus.</i>	VII.	VIII.	IX.
	A	B	C
Num. calc. omn. <i>a</i>	6	5	4
albor. <i>b</i>	4	4	4
nigr. <i>c</i>	2	1	0
<i>Expect.</i>	$\frac{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$	$\frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$	$\frac{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$

cum, quia prima, 4^{ta} & 7^{ma} electiones debentur ipsi A; 2^{da}, 5^{ta} & 8^{va} ipsi B; 3^{tia}, 6^{ta} & 9^{na} ipsi C; expectationes collusorum his numeris designatorum collectivè accipio, & habeo pro expectatione ipsius A, $\frac{4}{12} + \frac{4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$; B, $\frac{4 \cdot 8}{11 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$; C, $\frac{4 \cdot 7 \cdot 8}{10 \cdot 11 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}$; quae fractiones omnes ad nomen commu-

H 3

ne 5.

ne 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12, reductæ numeratores nanciscuntur sequentes: $4.5.6.7.8.9.10.11 + 4.5.6.7.8.6.7.8$
 $+ 4.5.3.4.5.6.7.8 \infty 4.5.6.7.8$ in $3.4.5 + 6.7.8$
 $+ 9.10.11$, $4.5.6.7.8.8.9.10 + 4.5.6.7.8.5.6.7$
 $+ 4.2.3.4.5.6.7.8 \infty 4.5.6.7.8$ in $2.3.4 + 5.6.7$
 $+ 8.9.10$, $4.5.6.7.8.9.7.8 + 4.5.6.4.5.6.7.8$
 $+ 1.2.3.4.5.6.7.8 \infty 4.5.6.7.8$ in $1.2.3 + 4.5.6$
 $+ 7.8.9$, unde eliso communi factore 4.5.6.7.8, ratio sortium exurgit, ut $3.4.5 + 6.7.8 + 9.10.11$, $2.3.4 + 5.6.7 + 8.9.10$, $1.2.3 + 4.5.6 + 7.8.9$, seu divid. per 6, ut $10 + 56 + 165 \infty 231$, $4 + 35 + 120 \infty 159$, $1 + 20 + 84 \infty 105$, rursusque divid. per 3, ut 77, 53, 35, uti supra. Et quia in numeris istis certam progressionis legem observamus, facile possemus regulam dare generalem pro numero collusorum & calculorum quocunque, si tanti referret his immorari.

III. Tertio sensu acceptum Problema (cùm singuli trium collusorum assumunt 12 calculos, aliusque post alium è suis unum depromit & non recondit) parùm differt à præcedente hypothese, nisi quòd ob auctum calculorum numerum multò prolixiorè operam deposcit.

Supponamus primò, ipsis A & B nullum ampliùs superesse calculum nigrum, ipsi C verò adhuc unum, quem propterea eligendi vices tangent. Is propter 4 calculos albos & 1 nigrum, 4 habet casus ad vincendum & unum ad perdendum; quandoquidem si hunc eduxerit, ipse A cui non nisi albi supersunt infallibiliter vincet: sed & ob eandem rationem primus A vicissim 4 habet casus ad perdendum & unicum ad vincendum; secundo verò B nihil omninò relinquitur, eò quòd alterutri reliquorum necessariò cedet victoria. Unde colligitur, sortes ipsorum A, B, C, fore $\frac{1}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$.

Supponamus deinde, ipsi A restare nullum, & singulis reliquorum unum nigrum. Sic ipse B, quem eligendi ordo tangit, 4 ad vincendum casus habet, totidemque ad perdendum reliqui;
 unus

unus verò casus est, qui unicuique illorum præcedentis casus expectationem affert; id quod ipsis A, B, C, sortem parit $\frac{1}{25}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{25}$.

Supponamus tertio, singulis A, B & C, restare unum calculum nigrum. Sic A quem penes proxima electio est, 4 habebit ad vincendum, reliquique ad perdendum casus; unum verò, quo perducuntur omnes tres ad præcedentes suas expectationes. Unde nascuntur ipsis sortes $\frac{101}{125}$, $\frac{4}{25}$, $\frac{4}{125}$; quas inter ratio est, ut 101, 20, 4.

Eodem modo ulterius investigandum esset, quid deberetur collusoribus A, B & C, cum ipsis restant calculi nigri, 1. 1. 2, 1. 2. 2, 2. 2. 2, 2. 2. 3, 2. 3. 3, 3. 3. 3, &c. quousque perveniretur ad casum propositum, qui singulis collusoribus 8 nigros calculos attribuit. Sed quia hæc sigillatim persequi supra modum tædiosum foret, idcirco ostendam, quo pacto quæsitum per saltum obtineri queat, inveniendò solummodò sortes illorum statuum, in quibus unicuique collusorum æqualis nigrorum calculorum numerus superest; quem numerum semper vocemus c , sicuti alborum b , & omnium $a \infty b + c$.

Oportet primò considerare omnes variationes, quæ accidere possunt cum unusquisque collusorum unum calculum è suis depromit; perspicuum autem est fieri posse, ut vel omnes tres educant album calculum, vel duo tantum, vel unus, vel nullus. Deinde attendendum, quot casus singulis harum variationum respondeant; quorum quidem numerus hoc modo initur: Si quis certaret fore, ut omnes tres educant album, ejus fors foret $\frac{b^3}{a^3}$: si futurum contenderet, ut duo A & B, vel duo A & C, vel B & C, album eligant & tertius nigrum, sortem haberet $\frac{b^2c}{a^3}$: si propugnaret fore, ut solus A vel B vel C album eximat, reliqui nigrum, sortem possideret $\frac{bcc}{a^3}$: si denique nulli album concedere vellet, sortem obtineret $\frac{c^3}{a^3}$, (quæ omnia ex Cor. 1. Regulæ Prop. XII. subjunctæ patescunt, cum tantundem hæc valeant, acsi ipse in æquali numero casuum tribus jactibus quippiam præcisè ter, aut bis, aut semel, præ-

Quibus ita præmissis, ut ad solutionem nostri Problematis revertamur, supponendum porrò est, singulis collusorum restare duos calculos nigros: Sic lit. *b* & *c* valebunt 4 & 2 (pro quibus substitui possunt minimi in eâdem ratione termini 2 & 1); & quia ratio sortium in casu præcedenti cùm singulis unus restabat calculus niger, quam literis *p*, *s*, *t* indigitamus, expressa fuit per numeros 101, 20, 4, quorum summa $p + s + t = 125$; hinc juxta præmissam formulam expedite inveniuntur numeri 2351, 770, 254, exprimentes rationem sortium, quas collusores in casu præsentì possident.

Eodem pacto, si singulis tres nigri superesse supponuntur, quo casu lit. *b* & *c* valent 4 & 3, ipsæque *p*, *s*, *t* numeros modò inventos 2351, 770, 254; ratio sortium reperitur designari per numeros 26851, 11270, 4754.

Si residui sint singulis 4 nigri, sic ut valor lit. *b* & *c* sit 4 & 4 (hoc est, in minimis terminis 1 & 1) inveniuntur sortes se habere in ratione 198351, 97020, 47629.

Si restent singulis nigri 5, hoc est, si lit. *b* & *c* valeant 4 & 5, habetur ratio sortium in numeris 1087407, 590940, 322029; seu dividendo per 9, in 120823, 65660, 35781.

Si singulis supersint nigri 6, adeoque valor lit. *b* & *c* sit 4 & 6, seu 2 & 3; exprimetur ratio sortium per 532423, 312620, 183957.

Si singulis adhuc remaneant nigri 7, sic ut lit. *b* & *c* significant 4 & 7, prodibit ratio sortium in numeris 1984423, 1236620, 771957.

Si denique nullo adhuc calculo educto omnes 8 nigri singulis supersint, literæque *b* & *c* valeant 4 & 8, hoc est, 1 & 2, qui quidem casus is est, quem nobis enodandum proposuimus, & cujus gratiâ præcedentes omnes expedire priùs necessum habuimus, invenimus, quòd optata ratio sortium collusorum A, B, C, designetur per numeros 6476548, 4231370, 2768457.

Applicationem methodi nobis usitatæ ad hanc hypothesin Lector ipse si vult instituet. Nos illam brevitatis gratiâ præterimus.

PROBLEMA III.

A Certat cum B quòd ipse ex 40 chartis Iuforiis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus fit; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

Solutio : Pone primò, jam tres diversarum specierum chartas extractas esse; quo factò ex unaquaque harum specierum adhuc remanebunt 9, hoc est, ex omnibus tribus speciebus 27 folia, & ex quartâ specie 10. Unde constat, quòd quartum folium extracturus habeat 27 casus ad perdendum, & 10 ad vincendum; id quod ipsi valet $\frac{10}{37}$ depositi.

Pone deinde, duas differentium specierum chartas extractas esse; quâ ratione ex iisdem speciebus adhuc restant folia 18, sicut ex reliquis duabus folia 20. Quapropter tertium folium exempturus 18 casus habet ad perdendum, & 20 ad obtinendum tres chartas diversarum specierum, hoc est, ad obtinendum præcedentem expectationem $\frac{10}{37}$; id quod ei sortem parit $\frac{1000}{703}$.

Pone tertio, extractam esse unam chartam; sic ex eâdem hâc specie, cujus est extracta, supersunt chartæ 9, ex reliquis verò tribus speciebus chartæ 30. Idcirco secundum folium accepturus 9 habet casus ad perdendum, & 30 ad acquirendum diversæ speciei folium, hoc est, ad impetrandam sortem modò inventam $\frac{1000}{703}$; id quod tantundem est ac si haberet $\frac{10000}{9139}$.

Si nulla adhuc charta extracta sit, fors extrahentis eadem est cum præcedente, manetque $\frac{10000}{9139}$; quoniam omnes 40 casus ipsum necessariò in eum statum conjiciunt, qui in paragrapho præced. suppositus fuit. Quare tum etiam fors contracertantis erit $\frac{8139}{9139}$; & ratio sortium, ut 1000 ad 8139, quemadmodùm habet Auctor.

Ejusdem Problematis solutio etiam aliter per Combinationum doctrinam confici potest, uti parte tertiâ post hujus doctrinæ explicationem ostendemus.

PRO-

P R O B L E M A I V.

A Ssumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio fortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Etiam istud Problema in tertiam libri partem rejicere cogimur, quoniam ad ejus solutionem artis combinatoriæ notitia prærequiri videtur.

P R O B L E M A V.

A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hac conditione: ut, si 11 puncta jactantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jactantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio fortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

Solutio: Considerandum primò, in tribus tesseris contineri 216 jactus diversos, & inter hos dari 15 jactus punctorum quatuordecim, & 27 jactus punctorum undecim; adeoque 15 casus esse in quolibet jactu, quibus efficitur ut aleator A à collusore B nummum accipiat, & 27 casus quibus contingit ut hic ab illo nummum consequatur; alios verò 174 casus, quibus uterque eundem numerorum numerum pristinamque proin sortem retinet.

Deinde attendendum, quòd illi 174 casus irriti, quibus collusorum sortes invariatae manent, per 4 Coroll. 3. dissimulari possint ac si prorsùs abessent, inque tesseris tribus solummodò 42 reperirentur jactus, quorum 15 ipsum A nummo potiri faciant, & 27 ipsum B.

Tertiò & illud considerandum, quòd pro numeris casuum 42, 15 & 27, utpote compositis inter se substitui possint per 2

Cor. 3, minimi in eadem ratione termini 14, 5 & 9; in quorum tamen rursus locum, ut generalior fiat solutio, nos literas a , b & c surrogamus.

Quibus animadversis in enodatione propositæ quæstionis ita deinceps progredior, ut inquiram ordine, quænam futuræ fuissent collusorum sortes, si singuli assumpsissent nummum unum, deinde si duos, postea si tres, quatuor &c. quousque per inductionem pateat, quænam iis sortes nunc competant, ubi singuli assumerunt nummos 12.

Si singuli assumant nummum unum, perspicuum est, sortes eorum fore in ratione ipsorum numerorum b & c .

Si singuli accipiant nummos duos, primus jactus efficiet, ut collusor A vel 3 possideat nummos, vel ut unus tantum ei supersit. Si tres possidet, habet b casus ad acquirendum omnes quatuor, hoc est, ad vincendum seu obtinendum depositum 1; & c casus, quibus ei relinquuntur nummi duo, hoc est, quibus revertitur ad sortem initio positam, quam vocare lubet 2; quod proin valet $\frac{b+cz}{a}$.

Si unicus illi nummus superest, habet b casus ad recuperandum duos, hoc est, sortem 2; & c casus ad perdendum ludum; id quod efficit $\frac{bz}{a}$. Atqui ut post primum jactum tres nummos numeret, rursus b sunt casus; c verò casus quibus ipsi unus tantum relinquitur. Itaque ab initio b casus extant qui ei dent $\frac{b+cz}{a}$, &

c qui dent $\frac{bz}{a}$; id quod sortem gignit $\frac{bb+2bcz}{aa}$: quare 2 ∞

$\frac{bb+2bcz}{aa}$, sive 2 $\infty \frac{bb}{aa-2bc} \infty \frac{bb}{bb+cc}$, & relinquitur collusori

B $\frac{cc}{bb+cc}$; adeò ut sortes ipsorum sint in ratione bb ad cc .

Si singuli assumant nummos tres, primo jactu continget, ut collusor A vel 4 nummorum compotem se videat, vel ut duorum tantum; in quibus statibus expectationes ejus appellentur x & y . Si quatuor nummorum compos est, ulterius vel ipse primus ab altero duos nummos impetrabit ac vincet, vel ab ipso duos consequetur

quetur alter, sic ut ei relinquuntur adhuc nummi duo: sed ut ipse primus duos proximos nummos consequatur, bb casus præstò sunt, & cc casus quibus idem alteri obtingit (uti ex eo quod modò ostensum est collato cum annot. Propos. XI. ad lit. I colligitur) quapropter bb casus habet ad 1, & cc casus ad sortem y , quod ei valet $\frac{bb+ccy}{bb+cc}$; cumque id ipsum etiam appellemus x , erit $x \propto \frac{bb+ccy}{bb+cc}$, seu $y \propto \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$. Similiter cum duo tantum ipsi restant nummi, bb casus habet ad recuperandum adhuc duos alios, hoc est, ad impetrandam sortem x , & cc casus ad perdendum suos & cum iis omne depositum; quod tantundem est ac si haberet $\frac{bbx}{bb+cc}$; cumque tum etiam habere supponatur y , fiet $y \propto \frac{bbx}{bb+cc}$; sed suprâ inventa quoque $y \propto \frac{bbx+ccx-bb}{cc}$; quare $\frac{bbx+ccx-bb}{cc}$ $\propto \frac{bbx}{bb+cc}$; atque hinc $x \propto \frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$; nec non $y (\propto \frac{bbx}{bb+cc}) \propto \frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$. Quo factò demùm accedendum ad statum initid positum, cogitandumque quòd ubi singuli tres nummos assument, b casibus contingere possit, ut collusor A post primum jactum 4 nummos possideat, hoc est, ut sortem x seu $\frac{b^4+bbcc}{b^4+bbcc+c^4}$ acquirat; & c casibus, ut duos residuos habeat nummos, id est, ut sortem y sive $\frac{b^4}{b^4+bbcc+c^4}$ consequatur. Unde tunc ejus expectatio fiet $\frac{b^5+b^4c+b^3cc}{b^5+b^4c+b^3cc+bb^3c+b^4c+c^5} \propto$ (institutâ per $bb+bc+cc$ divisione) $\frac{b^3}{b^3+c^3}$, & relinquetur collusori B $\frac{c^3}{b^3+c^3}$; sic ut sortes eorum nunc sint in ratione b^3 ad c^3 .

Quandoquidem igitur sortes collusorum A & B inveniuntur se habere in ratione simplici numerorum b & c , cum à singulis unus nummus assumitur; & in ratione duplicatâ horum numerorum, cum à singulis assumuntur duo; & in triplicatâ, cum tres: factâ inductione colligimus, quòd acceptis etiam quotlibet nummis sortes istæ perpetuò futuræ sint in ratione toties multiplicatâ numerorum b & c , quot nummi à singulis fuerint assumpti; & quòd

per consequens in proposito Auctoris exemplo, ubi ab unoquoque 12 assumpti supponuntur, sortes hæ se habeant, ut b^{12} & c^{12} , hoc est, restituendo 5 & 9, pro b & c , ut 244140625 & 282429536481; quemadmodum habet Auctor. Quod ipsum etiam vel absque calculo utcunque sic inferri potest: A habens omnes nummos præter unum habet b casus ad vincendum, & B habens omnes præter unum, habet c casus ad vincendum; dein A habens omnes nummos præter duos habet b casus ad obtinendum omnes præter unum, id est, ad b casus præcedentes, ideoque b vicibus b casus seu bb casus habet ad vincendum; & B habens omnes præter duos ob similem rationem habet cc casus ad vincendum: atque ita pro singulis nummis qui collusoribus ad vincendum defunt, præstò sunt ipsi A b , & ipsi B c casus, quibus ipsis accessus fit ad casus præcedentes; quare cum ab initio ludi uterque habeat nummos 12, & proinde utriusque totidem ad vincendum deficiant, numeri b & c duodecies positi ac in se ducti exhibebunt rationem sortium, ut antea.

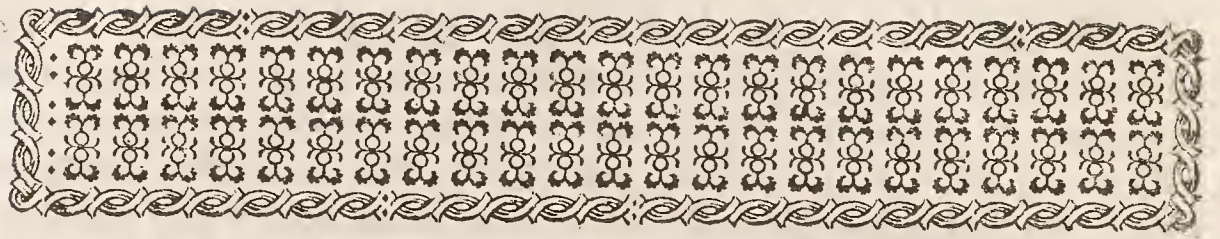
Quòd si quis tamen ratiocinium istud non sat evidentiae habere existimet, neque etiam inductioni satis fidat, is deinceps simili compendio, quo Auctor in Propos. XI. usus fuit, progredi poterit, nempe transeundo statim ad nummos sex, & hinc ad duodecim, omissis omnibus intermediis casibus. Quanquam ne sic quidem ulteriori calculo indigemus; idem enim qui supra subductus habetur in hypothese duorum assumptorum nummorum, etiam valet, si loco unius nummi quotlibet n nummos, & loco duorum in nummos assumptos intelligamus, dummodò pro numeris casuum b & c quibus alterutri collusorum unus nummus acquiritur vel perditur substituamus quoque numeros casuum, quibus ille n nummos acquirere vel amittere potest; adeò ut hinc legitime inferamus, rationem sortium quas habent collusores cum singuli $2n$ nummos assumunt perpetuò duplicatam esse debere ejus quæ obtinet cum singulis tantum n nummi assumpti sunt. Quare cum supra in casu trium assumptorum nummorum ratio sortium reperta sit ut b ad c , erit illa in casu nummorum 6 ut b^6 ad c^6 , indeque porrò in casu nummorum 12 ut b^{12} ad c^{12} , quemadmodum inductione collegeramus.

Et

Et sic quidem liquet de sortibus collusorum, cum ambo æquè multos nummos acceperunt; sed nondum constat de sortibus quas acquirunt in quolibet statu, in quem ludum prosequendo pervenire possunt, quando uni plures, alii pauciores nummi contingere. Interim etiam pro istis regula generalis datur; posito namque m pro numero nummorum quos habet A, & n pro numero eorum quos habet B, reperio quòd ratio sortis A ad sortem B semper sit futura, si b & c æquantur, ut m ad n ; sin c excedit b , ut $b^n c^m - b^m + n$ ad $c^m + n - b^n c^m$; quorum demonstratio, cum operosiorum calculum deposcat,

Lectori enodanda relinquatur. Nos verò absque ulteriore morâ ad alteram propositi nostri partem transimûs.





ARTIS CONJECTANDI PARS SECUNDA,

continens

Doctrinam de Permutationibus
& Combinationibus.

Proœmium.



In finitam varietatem, quæ cum in naturæ operibus, tum in actionibus mortalium elucet, quæque præcipuam hujus Universi pulcritudinem constituit, non aliunde quam ex diversimodâ compositione, mixturâ & transpositione partium ejus inter se originem ducere palàm est. Sed quia multitudo rerum ad effectum aliquem producendum concurrentium sæpenumerò tanta est tamque varia, ut difficillimum sit recensere vias omnes, quibus earundem compositio vel mixtura fieri vel non fieri potest, hinc fit ut nullum sit vitium, in quod homines etiam maximè prudentes & circumspecti frequentius incidant illo, quod Logici communiter appellant *insufficientem enumerationem partium*; adeò quidem ut non verear

verear dicere, hanc unicam ferè scaturiginem esse infinitorum eorumque gravissimorum errorum, quos in ratiociniis nostris circa res tum cognoscendas tum agendas quotidie committimus. Quare merito suo utilissima censenda est Ars, *Combinatoria* dicta, quæ huic mentis nostræ defectui medetur, docetque sic enumerare modos omnes possibiles, secundùm quos res plures permisceri, transponi vel conjungi invicem possunt, ut certi simus, nos nullum eorum prætermisisse, qui instituto nostro conducere valent. Quamquam enim hoc negotiū eatenus sit considerationis Mathematicæ, quatenus in subducendo calculo terminatur; si tamen usum & necessitatem spectes, universale prorsus est & ita comparatum, ut sine illo nec sapientia Philosophi, nec Historici exactitudo, nec Medici dexteritas, aut Politici prudentia consistere queat. Argumento sit hoc unicum, quòd omnis horum labor in *conjectando*, & omnis conjectura in trutinandis causarum complexionibus aut combinationibus versatur. Unde quoque nonnulli eximii Viri, ac nominatim Schootenius, Leibnitius, Wallisius, Prestetus, materiam hanc sibi tractandam sumpsere, ne quis existimet nova esse hîc omnia quæ prolaturi sumus; tametsi quædam non contemnenda de nostro adjecimus, imprimis demonstrationem generalem & facilem proprietatis numerorum figuratorum, cui cætera pleraque in nituntur, & quam nemo quod sciam ante nos dedit eruitve. Cùm itaque nondum plenum Artis systema habeamus, tum verò ne illa quæ habemus aliunde petere sit opus, visum est totam Doctrinam ab ovo ordiri ac ne quid indemonstratum relinquatur ex primis fundamentis eruere; quod tamen breviter fiet &

succinctè, nec nisi in quantum instituti nostri ratio exigere videtur. Totam Tractationem ad duo summa capita referimus, quorum unum Permutationum, alterum Combinationum doctrinam persequitur; cui accedit tertium, quod utrasque mixtim contemplatur.



C A P U T I.

De Permutationibus.



Permutationes rerum voco *Variationes*, juxta quas servatâ eâdem rerum multitudine ordo situsque inter ipsas diversimodè permutatur.

Itaque si quærat, quoties nonnullæ res transponi vel permisceri invicem possint, sic ut semper accipiantur omnes solo ordine sitive mutato, dicentur quæri omnes *Permutationes* rerum illarum.

Res autem permutandæ vel omnes possunt esse diversæ, vel aliquot earum eâdem; quæ quidem per totidem Alphabeti literas sive diversas sive easdem commodè designabuntur.

I. *Si res omnes permutandæ sunt diversæ:*

Cùm numerus permutationum in rebus pluribus iniri nequeat, nisi idem priùs in omnibus aliis numero paucioribus comperus habeatur, liquet in hâc inquisitione utendum viâ syntheticâ, h. e. ordiendum nobis esse ab hypothesis omnium primis & simplicissimis:

Unius rei vel literæ *a*, una tantùm sumtio vel positio est.

Duarum rerum aut literarum *a* & *b*, vel *a* præcedit & *b* sequitur, vel præcedente *b* sequitur *a*; unde duo ipsarum sunt ordines *ab* & *ba*.

Tres porrò literæ *a*, *b*, *c*, ita collocari possunt, ut primus locus vel ipsi *a* vel *b* vel *c* concedatur: si *a* primum tenet locum, reliquæ

reliquæ duæ duobus, ut diximus, modis disponi queunt: si *b* in primum locum transferatur, reliquarum duarum duplex itidem poterit esse positio; quod & intelligendum, ubi tertia *c* primam sedem occupaverit. Unde trium literarum in universum ter duæ seu 6 existunt permutationes *abc, acb: bac, bca: cab, cba*.

Similiter si 4. extent literæ *a, b, c, d*, earum unaquæque primum obtinere locum potest, interea dum tres reliquæ, ut nunc ostensum, ter bis seu sexies ordinem variabunt: quare cum earum, quæ primo loco poni possunt, sint quatuor, sequitur omnes quatuor quater ter bis, seu quater sexies, hoc est, vicies quater situm inter se permutare posse.

Ob eandem rationem accedente 5^{tâ} literâ *e* institui possunt quinquies tot variationes, quot in casu præcedenti, hoc est, quinquies 24, seu 120. Et generaliter, datis quotcunque literis, numerus permutationum, quas subire possunt omnes, toties excedit numerum permutationum, quas recipiunt literæ unâ pauciores, quot sunt unitates in dato literarum numero. Unde sponte manat sequens

Regula

pro inveniendis omnibus permutationibus rerum quotcunque datarum.

OMnes numeri ab unitate se consequentes naturali ordine ad datum usque rerum numerum inclusivè ducantur in se invicem, productum manifestabit quæsitum.

Putà, si datus rerum numerus sit *n*, numerus permutationum erit 1. 2. 3. 4. 5. &c. usque ad *n*; vel etiam (quia unitas non multiplicat) 2. 3. 4. 5. *n*. Nota, punctula numeris interjecta hîc & ubique in simili materiâ continuum numerorum in se ductum significant. Ex. gr. septem rerum permutationes sunt 2. 3. 4. 5. 6. 7 ∞ 5040. Ratio patet ex dictis, operatio ex adjunctâ Tabellâ:

Rerum,	Numerus Permutationum,
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600

2. Si rerum permutandarum nonnullæ sunt eadem :

Quodd si literæ una pluresve recurrant sæpius, hoc est, si in dato rerum numero aliquæ res similes sint sive eadem; ut, si datæ sint *aaabcd*, ubi litera *a* ter repetitur, numerus permutationum multo minor evadit: ad quem inveniendum cogitandum est, quodd, si omnes essent diversæ, putà, si loco *aaa* scriberetur *ααα*, possent hæ tres literæ etiam nullâ cæterarum loco motâ inter se sexies transponi, per præced. Regul. unde totidem diversæ nascerentur permutationes; at nunc cum sunt eadem, sex istæ permutationes literarum *ααα* nullam universarum dispositioni variationem inducunt, ac proinde pro unâ eademque habendæ sunt: quod cum de quâcunque dispositione literarum pariter sit intelligendum, indicium præbet, numerum permutationum rerum datarum sexies, h. e. toties minorem esse numero permutationum, quas subire possent si omnes essent diversæ, quoties inter se permutari queunt res similes: sed si omnes 6 literæ diversæ existerent, permutari possent juxta præced. 720. vicibus. Ergo nunc ubi tres ipsarum conveniunt, permutari duntaxat poterunt vicibus 120.

Iterum si datæ sint 6 literæ *aaabbc*, ubi præter literam *a* quæ ter recurrit, etiam litera *b* bis repetitur; manifestum est, numerum permutationum adhuc bis minorem evadere, quàm in præcedenti casu fuerat, adeoque solùm ad 60 se extendere: quandoquidem binæ quælibet permu-

permutationes, quæ ex solâ transpositione duplici literarum *bb*, si diversæ essent, nascerentur, nunc coïncidunt. Eodem pacto colligendum, si plures literæ repeterentur sæpiùs, pro singulis earum numerum permutationum minui toties, quoties seorsim inter se permutari possunt eadem literæ. Unde ratio habetur sequentis Regulæ :

Regula

pro inveniendis rerum permutationibus, cum earum nonnullæ sunt eadem :

Numerus permutationum, quas admitterent datæ res si omnes differentes essent, dividatur per numerum permutationum, quas subire potest res similis secundum multitudinem suam, si una sit quæ sæpiùs repetatur : aut per productum ex numeris permutationum, quas seorsim recipere possunt singulæ res similes secundum multitudinem suam, si plures sint quæ sæpiùs recurrant ; & quotiens exhibebit quæsitum.

Ufus Doctrinæ Permutationum insignis est in definiendo numero Anagrammatum alicujus vocis : Ex. gr. Transpositiones omnes possibles literarum in voce *Roma* sunt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \infty 24$, ob 4 differentes literas, per 1 Reg. in voce *Leopoldus* $\frac{362880}{2 \cdot 2 \infty 4} \infty 90720$: in voce *Studiosus* $\frac{362880}{2 \cdot 6 \infty 12} \infty 30240$, ob 9 utrobique literas, interque illas ibi geminum *l* & geminum *o*, hîc geminum *u* & triplex *s*, per 2 Reg.

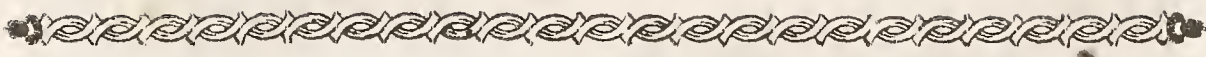
Huc pertinent versus nonnulli ob variationum multitudinem *Protei* dicti, quos inter celebrantur Lansii, Scaligeri, Bauhusii. Thomæ Lansio hoc distichon debemus :

Lex, Rex, Grex, Res, spes, Jus, Thus, Sal, Sol, (bona) Lux, Laus :
Mars, Mors, Sors, Lis, Vis, Styx, Pus, Nox, Fex, (mala) Crux, Fraus.

cujus singuli versus per Reg. pr. ob 11 monosyllaba (dissyllabis vocibus *bona & mala* 5^{ta} semper regioni affixis) salvâ metri lege variari possunt 39916800 vicibus. Et quanquam aliàs contingat, ut pleræque variationes in metri leges arietent, nec non ut plerique Anagrammatismi sint non-significantes & barbari; levi tamen plerunque industriâ opus est ad secernendum utiles ab inutilibus, illorumque numerum seorsim ineundum, si aliquem in iis inquirendis ordinem observes. Quemadmodum cernere est in hexametro à Bernh. Bauhusio Jesuitâ Lovaniensi in laudem Virginis Deiparæ constructo :

Tot Tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cælo;

quem dignum peculiari operâ duxerunt plures Viri celebres. Erycius Puteanus in libello, quem *Thaumata Pietatis* inscripsit, variationes ejus utiles integris 48 paginis enumerat, easque numero stellarum, quarum vulgò 1022 recensentur, accommodat, omissis scrupulosius illis, quæ dicere videntur, tot sidera cælo esse, quot Mariæ dotes; nam Mariæ dotes esse multo plures. Eundem numerum 1022 ex Puteano repetit Gerh. Vossius cap. 7. de *Scient. Mathemat.* Prestetus Gallus in primâ editione *Element. Mathemat.* pag. 348. Proteo huic 2196 variationes attribuit, sed factâ revisione in alterâ edit. tom. pr. pag. 133. numerum earum dimidio fere auctum ad 3276 extendit. Industrii Actorum Lips. Collectores m. Jun. 1686, in recensione *Tractatûs Wallisiani de Algebrâ*, numerum in quæstione (quem Auctor ipse definire non fuit ausus) ad 2580 determinant. Et ipse postmodum Wallisius in edit. latinâ operis sui Oxon. anno 1693. impressâ pagin. 494, eundem ad 3096 profert. Sed omnes adhuc à vero deficientes, ut delusam tot Virorum post adhibitas quoque secundas curas in re levi perspicaciam meritò mireris. Facto enim examine deprehendo, fæctum hunc Bauhusianum exclusis etiam spondaïcis, admissis verò iis qui cæsurâ destituti sunt, salvâ metri lege omnino ter millies tercenties ac duodecies variabilem esse. At prolixius de his agere tanti non interest, nec institutum nostrum patitur.



Typus Variationum Versûs Bauhufiani :

Tot Tibi sunt dotes , Virgö , quot sidera cælo.

Quintam Regionem Hexametri occupat vel

Sidera , quam vocem excipit aut vox

| *Dissyllaba una* , nempe vel

| | *Cælo* , ac tum vox *Tibi* inter sex reliquas occupat locum vel

| | | *Secundum* , præcedente voce nunc

| | | | *Monosyllabâ* , eâque vel

| | | | | *Tot* , cui casui respondent - - Variationes 24

| | | | | *Sunt* , - - - - - 24

| | | | | *Quot* , - - - - - 24

| | | | | *Dissyllabâ Virgö* , - - - - - 24

| | *Tertium* , præeuntibus

| | | *Unâ monosyllabâ & una dissyllabâ* , primas tenente vel

| | | | *Monosyllabâ* , *Tot* , quam excipit alterutra

| | | | | *Dotes : 6* } - - - - - 12
 | | | | | *Virgö : 6* }

| | | | | *Sunt* , - - - - - 12

| | | | | *Quot* , - - - - - 12

| | | | | *Dissyllabâ* , *Dotes* , quam sequitur

| | | | | *Tot : 6* } - - - - - 18
 | | | | | *Sunt : 6* }
 | | | | | *Quot : 6* }

| | | | | *Virgö* , - - - - - 18

| | | | | *Duabus dissyllabis* , nempe , *Dotes Virgö* , - - - - - 6

a b c d

a	b	c	d		174
				Quartum, præcedentibus	
				Tribus monosyllabis, - - - -	12
				Duabus monosyllabis cum dissyllabâ Virgö,	12
				Unâ monosyllabâ & duabus dissyllabis,	36
				Quintum, præmissis	
				Tribus monosyllabis cum unâ dissyllabâ,	48
				Duabus monosyllabis cum totidem dissyllabis, qua-	
				rum posterior Virgö,	18
				Sextum, - - - -	120
					<hr/>
					420 . . 420
				Dotes, unde totidem variationes, quot in Cælo, nempe	420
				Virgo, unde rursus totidem, quot in Cælo, exceptis so-	
				lùm illis 60 variationibus, ubi postrema syllaba	
				in Virgo correpta est; quibus proinde demtis ex	
				420 remanent - - - -	360
				Monosyllabæ duæ, æque	
				Quot sunt, vel Sunt quot; voce Tibi occupante lo-	
				cum vel	
				Secundum, primo relicto voci	
				Monosyllabæ, Tot: - - - -	12
				Dissyllabæ, Virgo: - - - -	12
				Tertium, præcedentibus	
				Monosyllabâ cum Dissyllabâ, - - - -	24
				Duabus Dissyllabis, quarum post. Virgö,	8
				Quartum, præeuntibus	
				Monosyllabâ cum duabus Dissyllabis, - - - -	36
				Tribus Dissyllabis, quarum ultima Virgö,	4
				Quintum, - - - -	48
					<hr/>
					144 - - 144
				Tot sunt, vel, Sunt tot, totidem - - - -	144
				Tot quot, aut, Quot tot, totidem - - - -	144
				Tibi, &c.	<hr/>
					1632

Tibi, quam vocem sequitur vox

1632

Dissyllaba una, eaque vel

| Cælo, voce *Sidera* occupante locum aut

| Primum, - - - - - 120

| Secundum, - - - - - 48

| Tertium, præmissis vel

| Duabus Monosyllabis, - - - - - 36

| Duabus Dissyllabis, - - - - - 12

| Quartum, præeuntibus Duabus Monof. & unâ Diss. 72

| Quintum, præc. duabus Monof. totidemq; Dissyll. 72

| | 360 . . 360

| Dotes, totidem quot in Cælo - - - - - 360

| Virgo, totidem - - - - - 360

Monosyllaba dua, eæque

| Quot sunt, vel, Sunt quot: voce *Sidera* tenente locum

| Primum: - - - - - 48

| Secundum, post Dissyllabam vocem, - - - - - 36

| Tertium, post duas Dissyllabas, - - - - - 24

| Quartum, post tres Dissyllabas, - - - - - 12

| | 120 - - 120

| Tot sunt, vel, Sunt tot, totidem - - - - - 120

| Tot quot, vel, Quot tot, totidem - - - - - 120

Monosyllabâ unâ, (quo casu ante *Tibi* semper habetur *Virgö*,) nempe vel

Sunt, voce *Sidera* locum possidente aut

| Primum: - - - - - 24

| Secundum: - - - - - 12

| Tertium, præced. duabus Monosyllabis, - - - - - 4

| - - - - - duabus Dissyllabis, - - - - - 4

| Quartum, - - - - - 12

| Quintum, - - - - - 24

80 . . 80

Tot, totidem quot in Sunt, - - - - - 80

Quot, totidem - - - - - 80

Summa omnium Variationum utilium 3312

L

CAP.

CAP. II.

De Combinationibus, iisque primò consideratis simpliciter.

Combinationes rerum sunt Conjunctiones, juxta quas ex datâ rerum multitudine nonnullæ eximuntur, interque se conjunguntur nullo ordinis situsve ipsarum respectu habito.

Idcirco cum quæritur, quoties ex dato rerum numero vel binæ, vel ternæ, vel quaternæ &c. accipi possint, sic ut nunquam omnes eadem res sumantur sæpiùs quàm semel, dicentur quæri omnes Combinationes diversæ rerum datarum.

Numerus, secundùm quem res datæ conjunguntur, dicitur *Exponens* Combinationis; ita si res binæ sumuntur, Exponens erit 2; si ternæ, 3; si quaternæ, 4. Res verò secundùm hos exponentes junctæ dicuntur *Binarii*, *Ternarii*, *Quaternarii* &c. vel *Biniones*, *Terniones*, *Quaterniones* &c. & consonanter etiam *Uniones* vel *Unitates* quando res sumuntur singulæ, & *Nulliones* cum nulla planè sumitur.

Conjunctiones ipsas nonnulli vocant *Combinations*, *Conjunctiones*, *Conjunctiones* &c. quas omnes vulgò unâ voce *Combinationum* complecti solent, tametsi hæc vox strictiori significatu propriè non nisi illas conjunctiones indigitare videatur, quibus res binæ invicem junguntur. Quamobrem alii generaliori voce *Complicationum* vel *Complexionum* uti malunt: alii magis appositè *Electiones* vocant, ut & illæ subintelligi possint rerum acceptiones, quibus res singulæ seorsim sumuntur, aut quibus etiam nulla planè sumitur.

Res autem inter se combinandæ vel omnes possunt esse diversæ, vel aliquot ipsarum eadem; æque vel ita combinari debent, ut in nullâ combinatione res eadem sæpiùs contineatur, quàm ipsa reperitur in toto rerum numero: vel sic, ut in eadem combinatione res eadem etiam sæpiùs recurrere, h. e. ut secum ipsâ quoque combinari possit. Iterumque quæri potest numerus combinationum

tionum vel secundum omnes exponentes conjunctim, vel secundum singulos seorsim. Atque insuper circa unumquemque horum combinandi modorum plures formari possunt quaestiones & problemata, è quibus illa tantum delibabimus, quæ in sequentibus alicui usui fore judicamus.

1.) *Si res omnes combinandæ sunt diversæ, inque nullâ combinatione eadem res bis occurrere debet, invenire omnes Combinationes simpliciter sive secundum omnes exponentes conjunctim:*

SUnto combinandæ modis omnibus literæ a, b, c, d, e &c. Fiant tot series quot literæ, hoc modo: In primâ serie ponatur sola litera a .

In secundâ ponatur b , nunc seorsim, nunc junctim cum a , ut habeatur ab vel ba . Eadem enim conjunctio est, quæ b cum a , & a cum b jungit, cum ordo non attendi supponatur.

In tertiâ collocetur c , eaque primò sola, dein juncta, partim cum a & b , ut fiant biniones ac, bc ; partim cum ipso binione ab , ut fiat ternio abc .

$a.$

 $b. ab.$

 $c. ac. bc. abc.$

 $d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.$

$e. ae. be. ce. de. abe. ace. bce. ade. bde. cde. abce. abde. acde. bcde. abcde.$

In quartâ ponatur d , primò sola, deinde juncta cum singulis præcedentium literarum a, b, c , singulisque earum tum binariis ab, ac, bc , tum ternario abc ; ut fiant novi biniones ad, bd, cd , terniones abd, acd, bcd , & quaternio $abcd$.

Similiter quintæ seriei agmen ducat litera e , quam primò ingrediatur sola, dein juncta cum omnibus præcedentium serierum electionibus. Eademque methodo procedendum, si plures essent

datae literae. Quâ ratione satis manifestum est, datas literas in istis seriebus omnifariam inter se junctas esse, nullamque earum fieri posse electionem, quæ non in unâ harum serierum reperitur, sed & nullam esse quæ alicubi bis occurrat; adeoque omnes unâ series suppeditaturas omnes electiones possibiles, quæ circa datas literas institui queunt.

Harum igitur numerus initur facile, si attendatur quod in quâlibet semper serie una amplius inveniri debeat electio, quàm in antecedentibus omnibus seriebus simul; quoniam litera, quæ illius seriei caput est, ibidem semel ponitur sola, & præterea unâ assumit secum omnes electiones præcedentium serierum. Hinc enim sequitur, quia in primâ serie est electio unica, fore in secundâ electiones duas, in tertiâ 4, in quartâ 8, & sic deinceps in progressionem geometricâ duplâ: quandoquidem progressionis duplæ ab unitate hanc quoque naturam esse constat, ut summa terminorum quotlibet unitate aucta sequentem terminum exhibeat. Quocirca summa electionum in seriebus omnibus æqualis est summæ terminorum totidem progressionis duplæ ab unitate, hoc est, per modum memoratam proprietatem, ipsi termino subsequenti ejusdem progressionis unitate multato; qui quidem terminus subsequens idem est cum producto binarii toties positi & in se ducti, quot ipsum in progressionem termini præcedunt, hoc est, quot sunt series, quarum electiones quærentur. Unde talis exurgit:

Regula

*pro inveniendis omnibus electionibus rerum datarum
secundum omnes exponentes:*

A producto binarii toties positi & multiplicati in se, quot sunt datae res, auferatur unitas, reliquum indicabit quæsitum.

Hoc est, posito rerum datarum numero n , numerus omnium electionum simpliciter, puta, omnium unionum, binionum, ternionum &c. erit $2^n - 1$. Hinc si nullionem seu electionem, quæ ex rebus datis nulla sumitur, quæque in quavis rerum multitudine

una semper est & unica, simul comprehendas, fiet numerus ille 2^n :
 sin cum nullione ipsos quoque uniones refeces, quorum numerus ipsi-
 rerum numero perpetuò æquatur, erit numerus binionum, ternio-
 num, cæterarumque complexionum $2^n - n - 1$. Ex. gr. Septem
 Planetarum conjunctiones vel complicationes omnes diversæ sunt
 $2^7 - 1 \infty 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2 - 1 \infty 128 - 1 \infty 127$; unde si demas e-
 lectiones 7, quibus singuli Planetæ seorsim accipiuntur, quæque pro-
 priè non conjunctiones sed disjunctiones Planetarum sunt, relinque-
 tur numerus omnium conjunctionum strictè dictarum, quibus Plane-
 tæ vel bini vel terni &c. vel denique septeni junguntur, $2^7 - 7 - 1$
 $\infty 120$. Sic etiam duodecim, uti vocant, Registra seu fistularum
 ordines in organo pneumatico, quibus sonus mox sibilans mox tre-
 mebundus efficitur, aut aliter modificatur, variari possunt $2^{12} - 1$
 $\infty 4095$ vicibus.

Nota: Si quis examinet series combinationum supra in typo
 expositas, observabit, in quâlibet serie (solâ primâ exceptâ, quæ
 unicum unionem *a* complectitur) numerum electionum secundum
 exponentes pares æquari numero electionum secundum impares;
 saltem cum id in aliquot ab initio seriebus verum deprehenderit,
 idemque quoque in serie proximè sequente locum habere concludet:
 nam litera, quæ illius seriei caput est, juncta præcedentium serie-
 rum electionibus iis, quæ impares exponentes habent, parium; &
 iis vicissim quæ pares habent juncta, imparium exponentium com-
 plexiones efficit; adsciscens verò primæ seriei unionem *a*, paris, &
 ipsa per se sola accepta imparis exponentis electionem constituit;
 unde & in hâc serie numerum harum numero illarum æquari con-
 stat. In omnibus igitur seriebus simul sumtis numerus electionum
 secundum impares exponentes numerum electionum secundum pares
 unitate superabit; aut si his insuper nullionem accenseas, æquabit.
 Quocirca cum numerus omnium electionum simpliciter incluso nul-
 lione ostensus sit 2^n , erit ejus semissis sive potestas binarii proximè
 minor 2^{n-1} numerus electionum secundum solos impares; & dem-
 to rursus nullione, $2^{n-1} - 1$ numerus electionum secundum solos
 pares exponentes. Idem quoque demonstrabitur infra in Coroll. 6.

Cap. 4.

L 3.

CAP.

66

CAP. III.

De Combinationibus secundum singulos exponentes seorsim; ubi de Numeris Figuratis, eorumque proprietatibus agitur.

EX typo Combinationum præcedentis capitis manifestum fit, litteram quæ cujuslibet seriei caput est, adjunctam unionibus serie- rum præcedentium efficere suæ seriei biniones, adjunctam binioni- bus efficere terniones. ternionibus 4^{ones} , & sic porro: adeoque nu- merum binionum in quavis serie æquari summæ unionum in omni- bus seriebus antecedentibus, numerum ternionum summæ binio- num, numerum quaternionum summæ ternionum & generaliter nu- merum combinationum secundum datum quemcunque exponen- tem in serie quâcunque æquari summæ combinationum omnium præcedentium serierum secundum exponentem unitate minorem da- to. Sequitur hinc, quod

Uniones, quia in singulis seriebus reperiuntur singuli; omnes inter se constituunt seriem $1.1.1.1.1.$ &c. seu, seriem unitatum.

Biniones in primâ serie nulli sunt, in secundâ 1 , in tertiâ $1+1$ $\infty 2$, in 4^{ta} $1+1+1$ $\infty 3$, in 5^{ta} $1+1+1+1$ $\infty 4$ &c. proinde omnes biniones inter se constituunt seriem $0.1.2.3.4.5.$ &c. hoc est, seriem numerorum Arithmeticè progressionum sive Latera- lium.

Terniones in primâ & secundâ serie nulli sunt, in $3^{\text{tiâ}}$ 1 , in 4^{ta} $1+2$ $\infty 3$, in 5^{ta} $1+2+3$ $\infty 6$, in 6^{ta} $1+2+3+4$ $\infty 10.$ &c. omnes itaque ordine accepti seriem conficiunt $0.0.1.3.6.10.15.$ &c. hoc est, seriem numerorum, ut vocant, Trigonalium.

Quaterniones in tribus primis seriebus nulli sunt, in 4^{ta} 1 , in 5^{ta} $1+3$ $\infty 4$, in 6^{ta} $1+3+6$ $\infty 10$, in 7^{ma} $1+3+6+10$ $\infty 20.$ &c. qui omnes ordine assumti seriem efficiunt $0.0.0.1.4.10.20.$ &c. seriem videl. Pyramidalium.

Pari ratione Quiniones omnes seriem constituunt Trianguli-pyramidalium 0.0.0.0.1.5.15.35. &c. Seniones seriem Pyramidi-pyramidalium 0.0.0.0.0.1.6.21. &c. aliæque combinationes secundum altiores exponentes efficiunt alias atque alias series Figuratorum altioris generis in infinitum.

Et sic occasione Doctrinæ Combinationum in speculationem insperatam Numerorum Figuratorum incidimus, quâ appellatione vulgò insigniuntur numeri, qui ex continuâ Arithmeticè proportionalium indeque ortorum numerorum additione vel collectione generantur.

Ut verò hæ figuratorum numerorum series sub unum aspectum caderent, eoque faciliùs comprehenderentur quæ de illis dicenda sunt, sequentem apposui Tabellam, quam quis nullo negotio quous-

Tabula

Combinationum, seu Numerorum Figuratorum.

Exponentes Combinationum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
1.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4.	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5.	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
6.	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
7.	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0
8.	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
9.	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
10.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
11.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
12.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

Numeri Rerum Combinandarum.

quousque voluerit tum deorsum tum dextrorsum continuabit. Numeri barbari in sinistro Tabulæ margine adscripti numerant columnas transversas, & simul rerum combinandarum multitudinem: numeri verò Romani in supremo margine conspicui numerant columnas verticales & unâ exponentes combinationum innuunt. Columnarum verticalium prima est series Monadum seu unitatum, secunda series numerorum naturalium seu lateralium ab unâ cyphrâ incipiens, tertia series Trigonalium incipiens à cyphris duabus, 4^{ta} Pyramidalium incipiens à tribus, 5^{ta} Trianguli-pyramidalium incipiens à 4 cyphris; & sic deinceps.

Habet hæc Tabula proprietates planè eximias & admirandas; præterquàm enim quòd Combinationum mysterium in illâ latere jam ostendimus, notum est interioris Geometriæ peritis, præcipua etiam totius reliquæ Matheseos arcana inibi delitescere. Nos proprietatum aliquas hîc delibabimus, & quidem delibabimus tantùm, nullius nisi primariæ illius, quæ proposito nostro inservit demonstrationem accuratiorem allaturi, cùm cæteræ vel ex hâc ostendi possint, vel ex ipsâ Tabellæ constructione & numerorum figuratorum genesi satis patefcant.

Mirificæ proprietates Tabulæ Combinationum:

1. Columnarum verticalium secunda incipit ab unâ cyphrâ, tertia à cyphris duabus, 4^{ta} à 3^{bus}; & generaliter columna c à cyphris $c - 1$.
2. Columnarum verticalium termini primi significativi à sinistra dextrorsum obliquè descendendo ordine sumti reddunt ipsos terminos primæ columnæ verticalis, secundi secundæ, tertii tertiæ, & ita deinceps: putà, primi constituunt seriem monadum, secundi lateralium, tertii trigonalium &c.
3. Secundus ab unitate terminus columnæ verticalis cujuslibet æquatur ipsius columnæ numero.
4. Terminus quivis Tabellæ æquatur summæ omnium superiorum præcedentis columnæ verticalis.
5. Quilibet terminus æquatur duobus aliis immediatè supra se po-

se positis, quorum unus est in eâdem verticali columnâ, alter in præcedente.

6. Columnæ cujusvis transversæ termini ab unitate aliquoufque crescunt, deinde per eisdem gradus rursus decrescunt. Idem intellige de summis columnarum verticalium æque-altarum, seu terminis sequentis columnæ transversæ, per 4 propr.

7. Columnarum verticalium æque-altarum bases, sive termini columnæ transversæ cujuslibet, primus quidem & ultimus significativus perpetuò inter se æquantur, ut & secundus & penultimus, tertius & antepenultimus, atque ita porro, si columna pluribus terminis significativis constet.

8. Quin & sumtis ab initio columnis verticalibus quotcunq; cum totidem transversis, collectisque in unam summam qui in eâdem verticali sibi respondent terminis, erit summa prima æqualis penultimæ, secunda antepenultimæ, tertia proantepenultimæ, & sic deinceps. Exhibent enim hæ summæ ipsos columnæ transversæ sequentis terminos primo excepto. Conf. propr. 4 & 7. Ex. gr. Quinque primæ columnæ tum verticales tum transversæ sunt:

1.	0.	0.	0.	0.
1.	1.	0.	0.	0.
1.	2.	1.	0.	0.
1.	3.	3.	1.	0.
1.	4.	6.	4.	1.

5. 10. 10. 5. 1. Termini sextæ columnæ transversæ primo excepto.

9. Columnæ transversæ ordine exhibent coëfficientes omnium potestatum à radice aliquâ binomiâ genitarum; nempe secunda coëfficientes radicis 1.1. tertia quadrati 1.2.1. quarta cubi 1.3.3.1. quinta biquadrati 1.4.6.4.1. & sic porro.

10. Summæ serierum transversarum progrediuntur in continuâ ratione duplâ: summarum verò summæ ab initio collectæ terminos constituunt progressionis duplæ unitate multatos; putà

1	∞ 1	1	1	∞ 1	∞ 2	1	2	—1
1+1	∞ 2	2	1	∞ 3	∞ 4	1	4	—1
1+2+1	∞ 4	4	1	∞ 7	∞ 8	1	8	—1
1+3+3+1	∞ 8	8	1	∞ 15	∞ 16	1	16	—1
1+4+6+4+1	∞ 16	16	1	∞ 31	∞ 32	1	32	—1

Fluit ex iis, quæ in præced. cap. de Combinationibus simpliciter spectatis dicta sunt.

11. Termini seriei verticalis cujuslibet ordine divisi per terminos collaterales seriei præcedentis (initio vel ab unitate vel à suis respectivè cyphris factis) exhibent quotos Arithmeticè proportionales, quorum communis differentia est fractio, cujus numerator est unitas, & denominator ipse numerus sive secundus ab unitate terminus seriei dividendis. Ex. gr.

<i>Divis.)</i>	<i>divid.(quot.)</i>	<i>divis.)</i>	<i>divid.(quot.)</i>	<i>divis.)</i>	<i>divid.(quot.)</i>	<i>divis.)</i>	<i>divid.(quot.)</i>
1)	1 (2:2)	1)	0 (0:2)	1)	1 (3:3)	1)	0 (0:3)
2)	3 (3:2)	2)	1 (1:2)	3)	4 (4:3)	3)	1 (1:3)
3)	6 (4:2)	3)	3 (2:2)	6)	10 (5:3)	6)	4 (2:3)
4)	10 (5:2)	4)	6 (3:2)	10)	20 (6:3)	10)	10 (3:3)
5)	15 (6:2)	5)	10 (4:2)	15)	35 (7:3)	15)	20 (4:3)

Non difficulter hæc proprietas, si opus foret, deduci posset ex sequente.

12. Summa terminorum quotcunque seriei verticalis cujuslibet à suis respectivè cyphris incipientis ad summam terminorum totidem ultimo æqualium eam habet rationem, quam habet unitas ad illius seriei numerum; hoc est, Aggregatum numerorum quotcunque lateralium ab unâ cyphrâ seriem auspicantium est ad aggregatum numerorum totidem maximo eorum ceu ultimo æqualium, ut 1 ad 2; trigonalium à cyphris duabus, ut 1 ad 3, pyramidalium à tribus, ut 1 ad 4. &c. Idem quoque valet de ratione, quam habet summa terminorum seriei cujuslibet ab unitate incipientis ad summam totidem maximum sequenti termino æqualium. Ex. gr.

0 3	1 5	0 6	1 15
1 3	2 5	1 6	3 15
2 3	3 5	3 6	6 15
3 3	4 5	6 6	10 15
6 . 12 :: 1 . 2	10 . 20 :: 1 . 2	10 . 30 :: 1 . 3	20 . 60 :: 1 . 3
0 10			
0 10	1 56		
0 10	4 56		
1 10	10 56		&c.
4 10	20 56		
10 10	35 56		
15 . 60 :: 1 . 4	70 . 280 :: 1 . 4		

Cùm inter affectiones numerorum figuratorum hæc præcipua sit, eademque scopo nostro primariò inserviat, visum hîc est exponere methodum, quâ talem proprietatis *ἀριθμητικὴν* exhibeo, quæ simul & scientifica sit, & propositum universaliter concludat. Quem in finem sequentia præstruo lemmata:

1. *Lemma*: Summa terminorum quotlibet primæ seriei ad summam totidem terminorum ultimo æqualium rationem habet æqualitatis, sive ut 1 ad 1.

Dem. Cùm enim series meris constet unitatibus, erit summa terminorum quotlibet, summa tot unitatum, h. e. tot terminorum ultimo æqualium, quot sunt termini.

2. *Lemma*: In qualibet serie à suis respectivè cyphris incipiente, si quota est ipsa inter series, tot ab initio sumantur termini, erit summa terminorum omnium ad summam totidem ultimo æqualium, ut 1 ad seriei numerum.

Dem. Numerus enim cyphrarum quamcunque seriem auspantium unitate minor est seriei numero, per propr. 1. his igitur si accedat sequens terminus, numerus terminorum seriei numero æquabitur; sed terminus, qui proximè cyphras sequitur, est unitas, per

propr. 2. unde terminorum aggregatum æquatur unitati, & aggregatum totidem ultimo æqualium ipsi seriei numero; quare constat.

3. *Lemma*: In quâcunque numerorum serie, si summa terminorum ab initio sumtorum ad summam totidem ultimo æqualium perpetuò eandem habeat rationem, quotcunque accipiantur termini, putà ut 1 ad R, ita ut summa terminorum æquetur summæ totidem ultimo æqualium divisæ per R; erit numerus terminorum assumptorum ablato R ad eundem numerum unitate multatum, ut sumtorum penultimus ad ultimum.

Dem. Sumti sint ab initio termini quotlibet A. B. C. D. quorum numerus sit N, penultimus C, & ultimus D. Est utique $A + B + C \propto A + B + C + D - D$, hoc est, per hypoth. $\frac{C \text{ in } N-1}{R} \propto \frac{D \text{ in } N}{R} - D$ & æque-multiplicando, $C \text{ in } N - 1 \propto D \text{ in } N - D \text{ in } R \propto D \text{ in } N - R$, adeoq; $N - R. N - 1 :: C. D$. Quod erat demonstrandum.

4. *Lemma*: In Tabulâ numerorum figuratorum si duæ sint columnæ verticales contiguæ, in quarum priore quotlibet ab initio termini ad totidem ultimo eorum æquales habeant constantem rationem ut 1 ad r; habeant verò in posteriore termini aliquot ab initio sumti ad totidem sumtorum ultimo æquales rationem ut 1 ad r + 1: habebit quoque addito sequenti termino, summa omnium terminorum unà cum adjecto ad tot terminos adjecto æquales, quot sunt cum adjecto termini, rationem ut 1 ad r + 1.

Dem. Samti sint in posteriore columnâ termini E. F. G. H, quos proximè sequatur I; atque sumantur in columnâ immediatè præcedente termini totidem A. B. C. D; sumtorum verò utrinque numerus sit n. Erit $r H \propto$ (ex num. figurat. genesi per propr. 4) $r \text{ in } A + B + C \propto$ (per hyp.) $n - 1 \text{ in } C \propto$ (per lemma 3) $n - r \text{ in } D$; quare $n - r. H :: r. D ::$ (hypoth.) $n. A + B + C + D ::$ (ex num. fig. genesi per propr. 4) $n. I$. Unde $n - r \text{ in } I \propto n H \propto$ (hypoth.) $r + 1 \text{ in } E + F + G + H$; adeoque $n - r. r + 1 :: E + F + G + H. I$, & componendo $n + 1. r + 1 :: E + F + G + H + I. I$, hoc est, $E + F + G + H + I. n + 1 \text{ in } I :: 1. r + 1$. Q. E. D.

Cum olim horum Fratri copiam fecissem, animadvertit ille posse demon-

demonstrationem eleganter abbreviari, postremis tribus lemmatibus in unum conflatis, hoc modo :

Lemma: In Tab. num. fig. si summa terminorum ab initio seriei verticalis cujusvis ad summam totidem maximo æqualium ubique rationem habeat ut 1 ad r , habebit summa terminorum seriei proximè sequentis ad summam totidem maximo æqualium rationem ut 1 ad $r + 1$.

Dem: Sint series sequentes $a, b, c, d, \&c.$ & $o, g, h, i, \&c.$ numerus terminorum prioris sit n , posterioris $n + 1$. Est primò $q + p + l + i + h + g + o \propto$ (ex hyp. & genesi num. fig. per propr. 4) $\frac{nf}{r} + \frac{n-1.e}{r} + \frac{n-2.d}{r} + \frac{n-3.c}{r} + \frac{n-4.b}{r} + \frac{n-5.a}{r} \propto \frac{n.f + e + d + c + b + a - e - 2d - 3c - 4b - 5a}{r} \propto$ (ex gen. num. fig.) $\frac{nq - p - l - i - h - g}{r}$

Ergò $rq + r \cdot \frac{p+l+i+h+g}{r+1} \propto nq - p - l - i - h - g$; factâque translatione convenienti $\frac{p+l+i+h+g}{r+1} \cdot \frac{p+l+i+h+g}{r+1} \propto nq - rq$: dividatur utrinq; per $r + 1$, erit $p + l + i + h + g \propto \frac{nq - rq}{r + 1}$; additoque q habebitur $q + p + l + i + h + g \propto \frac{nq - rq}{r + 1} + q \propto \frac{n + 1 \cdot q}{r + 1}$, hoc est, $g + h + i + l + p + q, n + 1 \cdot q :: 1, r + 1$. Q. E. D.

Propositio principalis: In Tab. num. fig. summa terminorum quotlibet à suis respectivè cyphris incipientium ad summam totidem ultimo æqualium; item summa terminorum quotvis incipientium ab unitate ad summam totidem ultimum sequenti æqualium, in serie primâ seu monadum est ut 1 ad 1, in serie secundâ seu lateralium ut 1 ad 2; in tertiâ seu trigonalium ut 1 ad 3, in 4^{ta} seu pyramidalium ut 1 ad 4, & generaliter in serie quâcunque ut 1 ad illius seriei numerum.

Dem. I. De primâ ferie constat ex primo lemmate: de secundâ, tertiâ, 4^{ta} &c. è reliquis. Nam quia summa terminorum quotlibet ad summam totidem ultimo æqualium in primâ serie est ut 1 ad 1, erit vi horum lemmatum in 2^{dâ} ut 1 ad 1 + 1 $\propto 2$; & quia in

2^{dâ} est ut 1 ad 2, erit in 3^{tiâ} ut 1 ad 2 + 1 ∞ 3; & propterea etiam in 4^{tâ} ut 1 ad 3 + 1 ∞ 4; in 5^{tâ} ut 1 ad 4 + 1 ∞ 5; & generaliter in ferie c ut 1 ad c .

II. Quia rationem 1 ad $r + 1$ memoratam in ultimo lemmate hâc interpretamur per rationem 1 ad c , erit $r \infty c - 1 \infty$ (per propr. 1.) numero cyphrarum, à quibus columna c incipit. Quare cùm in dicto lemmate repertum sit $g + h + i + l + p \infty \frac{n-r \cdot q}{r+1} \infty \frac{n-r \cdot q}{c}$, sequitur quòd $g + h + i + l + p$ (summa terminorum quorum numerus est n) se habet ad q in $n - r$ (numerum terminorum minus numero cyphrarum) sicut 1 ad c ; hoc est, summa terminorum quotlibet ab unitate incipientium ad totidem terminos sequenti ultimum æquales, ut 1 ad c .

Confectarium: Ex hâc ostensâ proprietate facilè nunc est, invenire tum terminum optatum, tum summam terminorum seriei cujuslibet: Summi intelligantur termini æque-multi ex pluribus continuè columnis, & sit numerus sumtorum ab initiò cujusque columnæ n , adeoque numerus terminorum ab unitate (exclusis cyphris initialibus) in secundâ columnâ $n - 1$, in tertiâ $n - 2$, in 4^{tâ} $n - 3$. &c. per 1 propr. quo posito quæsitum ita colligo: Summa terminorum n primæ columnæ, nempe, n unitates seu $\frac{n}{1}$ æquatur termino $n + 1$, hoc est, termino sequenti ultimum secundæ columnæ, per 4 propr. ex tabulæ genesi. Quare termini hujus in $n - 1$ (numerum terminorum ab unitate 2^{dæ} columnæ) ducti subduplum, seu $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$, per 12 propr. æquale est aggregato terminorum 2^{dæ} columnæ, & simul per 4 propr. ipsi termino sequenti ultimum tertiæ col. Unde similiter hujus termini in $n - 2$ (num. termin. ab unitate 3^{tiæ} col.) ducti subtripulum, nempe $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, æquatur per 12 propt. aggregato terminorum 3^{tiæ} columnæ, insimulque per 4 propr. ipsi termino sequenti ultimum 4^{tæ}. Quocirca & hujus termini in $n - 3$ (num. term. ab unit. 4^{tæ} col.) ducti subquadruplum, putà $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, exhibet summam terminorum 4^{tæ} columnæ, unâque terminum qui sequitur ultimum 5^{tæ}; & rursus istius termini in $n - 4$ ducti subquintuplum

plum $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ producit summam terminorum col.
 5^{tæ}, & simul terminum qui excipit ultimum 6^{tæ}; atque ita confe-
 quenter. E quibus igitur infertur, quòd summa terminorum n pri-
 mæ columnæ sit $\frac{n}{1}$, 2^{dæ} $\frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$, 3^{tia} $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, 4^{tæ} $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,
 $\frac{n - 3}{1}$, 5^{tæ} $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, & generaliter columnæ c ,
 $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \dots n - c + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots c}$. Et quia quælibet harum
 quantitatum etiam exprimit terminum $n + 1$ sequentis columnæ,
 sequitur quòd ipse illius terminus optatus seu ultimus n habeatur mu-
 tato solummodò ubique n in $n - 1$; adeoque quòd terminus optatus,
 secundæ columnæ sit $\frac{n - 1}{1}$, tertiae $\frac{n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2}$, 4^{tæ} $\frac{n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,
 5^{tæ} $\frac{n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, & generaliter columnæ c , $\frac{n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \dots n - c + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c - 1}$.

Scholium: Multi, ut hoc in transitu notemus, numerorum fi-
 guratorum contemplationibus vacârunt (quos inter Faulhaber &
 Remmelini Ulmenses, Wallisus, Mercator in Logarithmotechniâ,
 Prestetus, aliique) sed qui proprietatis hujus demonstrationem uni-
 versalem dederit & scientificam, novi neminem. Wallisus in A-
 rithm. Infinitorum fundamentum suæ methodi jacturus, rationes
 quas habent series Quadratorum, Cuborum aliarumque potestatum
 numerorum naturalium ad seriem totidem maximo æqualium, in-
 ductione investigat; indeque prop. 176 ad contemplationem Trigo-
 nalium, Pyramidalium, reliquorumque figuratorum transit: sed
 fatius fuisset forteque naturæ rei convenientius, si vice versâ tracta-
 tionem numerorum figuratorum, eamque universali & accuratâ de-
 monstratione munitam præmisisset, ac tum demum ad potestatum
 summas investigandas perrexisset. Præterquam enim quod modus
 demonstrandi per inductionem parùm scientificus est, insuperque
 pro qualibet serie peculiarem operam deposcit; illa utique omnium
 judicio præcedere debent, quæ cæteris naturâ sunt priora & simpli-
 ciora, quales videntur esse numeri figurati præ potestatibus, tum
 quod

quod illi additione, hæ multiplicatione generantur, tum & præcipuè quod series figuratorum à suis respectivè cyphris incipientes ad series æqualium rationem habent exactè submultiplicem, qualem non habere possunt series potestatum (saltem in terminis numero finitis) absque aliquo excessu vel defectu quicumque cyphrarum numerus ipsis præfigatur. De cætero namque ex cognitis figuratorum summis nihilo difficilius investigari poterunt potestatum summæ, atque ex his priores collegit auctor; quod quomodo fiat, paucis ostendam.

Proponatur series numerorum naturalium ab unitate 1. 2. 3. 4. 5. &c. usque ad n , & quærantur omnium ipsorum, item omnium quadratorum, cuborum &c. ex ipsis summæ: Quoniam in tab. combinat. terminus secundæ columnæ indefinitè est $n-1$, & summa omnium terminorum, hoc est, summa omnium $n-1$ seu \int_{n-1} per confect. præcedens inventa $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \propto \frac{nn-n}{2}$, erit \int_{n-1} si-
ve $\int n - \int 1 \propto \frac{nn-n}{2}$, & $\int n \propto \frac{nn-n}{2} + \int 1$; sed $\int 1$ (summa omnium unitatum) est n ; quare summa omnium n seu $\int n \propto \frac{nn-n}{2} + n \propto \frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$.

Porro cum terminus tertiæ columnæ indefinitè acceptus per idem confect. sit $\frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2} \propto \frac{nn-3n+2}{2}$, & summa omnium terminorum (hoc est, omnium $\frac{nn-3n+2}{2}$) $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \propto \frac{n^3-3nn+2n}{6}$; erit $\int \frac{nn-3n+2}{2}$ si-
ve $\int \frac{1}{2}nn - \int \frac{3}{2}n + \int 1 \propto \frac{n^3-3nn+2n}{6}$,
& $\int \frac{1}{2}nn \propto \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \int \frac{3}{2}n - \int 1$; sed $\int \frac{3}{2}n \propto \frac{3}{2}\int n \propto$ (per modo ostensa) $\frac{3}{4}nn + \frac{3}{4}n$, & $\int 1 \propto n$: unde his substitutis fit $\int \frac{1}{2}nn \propto \frac{n^3-3nn+2n}{6} + \frac{3nn+3n}{4} - n \propto \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}nn + \frac{1}{12}n$, ejusq; duplum $\int nn$ (summa quadratorum ex omnibus n) $\propto \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$.

Rurfus quia terminus 4^{tæ} columnæ est $\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \propto \frac{n^3-6nn+11n-6}{6}$, & summa omnium terminorum $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \propto$
 $\propto n^4$

$\infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, erit utique $\int \frac{n^3 - 6nn + 11n - 6}{6}$, hoc est,
 $\int \frac{1}{6}n^3 - \int nn + \int \frac{11}{6}n - \int 1 \infty \frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24}$, indeque $\int \frac{1}{6}n^3 \infty$
 $\frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \int nn - \int \frac{11}{6}n + \int 1$. Et quoniam per modo in-
 venta $\int nn \infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$; nec non $\int \frac{11}{6}n$ sive $\frac{11}{6}\int n \infty \frac{11}{12}nn + \frac{11}{12}n$,
 & $\int 1 \infty n$; hinc factâ horum substitutione emerget $\int \frac{1}{6}n^3 \infty$
 $\frac{n^4 - 6n^3 + 11nn - 6n}{24} + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n - \frac{11}{12}nn - \frac{11}{12}n + n \infty$
 $\frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{24}nn$, ejusque proin sextuplum $\int n^3$ (summa cubo-
 rum) $\infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$. Atque sic porro ad altiores gradatim
 potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum
 licet:

Summa Potestatum.

$\int n$	∞	$\frac{1}{2}nn + \frac{1}{2}n$.
$\int nn$	∞	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$.
$\int n^3$	∞	$\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}nn$.
$\int n^4$	∞	$\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * - \frac{1}{30}n$.
$\int n^5$	∞	$\frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 * - \frac{1}{12}nn$.
$\int n^6$	∞	$\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{7}{12}n^5 * - \frac{1}{6}n^3 * + \frac{1}{42}n$.
$\int n^7$	∞	$\frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 * - \frac{7}{24}n^4 * + \frac{1}{12}nn$.
$\int n^8$	∞	$\frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 * - \frac{7}{15}n^5 * + \frac{2}{9}n^3 * - \frac{1}{30}n$.
$\int n^9$	∞	$\frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 * - \frac{7}{10}n^6 * + \frac{1}{2}n^4 * - \frac{1}{12}nn$.
$\int n^{10}$	∞	$\frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{3}{5}n^9 * - 1n^7 * + 1n^5 * - \frac{1}{2}n^3 * + \frac{5}{66}n$.

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius inspexerit, eundem
 etiam continuare poterit absq; his ratiociniorum ambagibus: Sumtâ
 enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c \infty \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} Bn^{c-3} +$$

$$\frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} Cn^{c-5} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

$Dn^{c-7} \dots$ & ita deinceps, exponentem potestatis ipsius n con-
 tinuè minuendo binario, quousque perveniatur ad n vel nn . Literæ
 capitales A, B, C, D &c. ordine denotant coëfficientes ultimo-
 rum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$ &c. nempe A $\infty \frac{1}{6}$, B

N $\infty - \frac{1}{30}$

$\infty - \frac{1}{30}$, $C \infty \frac{1}{42}$, $D \infty - \frac{1}{30}$. Sunt autem hi coëfficientes ita comparati, ut singuli cum cæteris sui ordinis coëfficientibus complere debeant unitatem; sic D valere diximus $-\frac{1}{30}$, quia $\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{7} - \frac{7}{15} + \frac{2}{9} (+D) - \frac{1}{30} \infty 1$. Huius laterculi beneficio intra semi-quadrantem horæ reperi, quòd potestates decimæ sive quadrato - surfolida mille primorum numerorum ab unitate in summam collecta efficiunt

9 1 4 0 9 9 2 4 2 4 1 4 2 4 2 4 3 4 2 4 2 4 1 9 2 4 2 4 2 5 0 0 .

E quibus apparet, quàm inutilis censenda sit opera Ismaëlis Bullialdi, quam conscribendo tam spisso volumini Arithmeticæ suæ Infinitorum impendit, ubi nihil præstitit aliud, quàm ut primarum tantum sex potestatum summas (partem ejus quod unicâ nos consecuti sumus paginâ) immenso labore demonstratas exhiberet.

Antequam caput hoc finiamus, paucis adhuc indicare lubet, quomodo suppositis iis, quæ de seriebus figuratis ostensa sunt, possint quævis etiam aliæ series figuratarum analogæ (quæ scil. differentias suas primas, secundas, tertias &c. æquales habent, adeoque ex continua additione terminorum alicujus seriei æqualium generantur) ad homologas figuratas reduci, ac proinde summari, vel postremi ipsarum termini inveniri: Sit series quævis æqualium D, ex cujus additione nascatur series C, & ex hujus additione series B, & ex hujus tandem collectione series A, sumtis ad arbitrium primis serierum terminis d, c, b, a . Vocabitur series A figuratarum analogæ, cujus differentiæ primæ constituunt seriem B, secundæ seriem C,

D	C	B	A	
d	c	b	a	tertiæ seriem D,
d	$c + d$	$b + c$	$a + b$	&c. Et quoniam apparet, seriem A componi
d	$c + 2d$	$b + 2c + d$	$a + 2b + c$	ex seriebus unitatum 1, 1, 1, 1
d	$c + 3d$	$b + 3c + 3d$	$a + 3b + 3c + d$	&c. lateralium
d	$c + 4d$	$b + 4c + 6d$	$a + 4b + 6c + 4d$	1, 2, 3, 4. &c.
d	$c + 5d$	$b + 5c + 10d$	$a + 5b + 10c + 10d$	

trigonalium 1, 3, 6, 10, &c. pyramidalium 1, 4, 10, 20. &c. in primos differentiarum terminos a, b, c, d , seorsim ductis, quarumque omnium postremi termini & summæ per ante dicta habentur, ipsius quoque

quoque hinc seriei A postremum terminum & summam terminorum obtineri posse constat; nimirum si numerus terminorum vocetur n , erit ultimus terminus seriei A $\infty a + n - 1 . b + \frac{n - 1 . n - 2}{2} c + \frac{n - 1 . n - 2 . n - 3}{2 . 3} d$; & summa omnium terminorum $\infty na + \frac{n . n - 1}{2} b + \frac{n . n - 1 . n - 2}{2 . 3} c + \frac{n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{2 . 3 . 4} d$.



C A P U T I V .

Invenire numerum Combinationum secundum singulos exponentes seorsim; ubi simul ostenditur, in quot combinationibus una pluresve res præscriptæ conjunctim vel divisim reperiantur.

EX cap. præc. constat, numerum combinationum secundum quemcunque exponentem æquari aggregato respectivæ seriei numerorum figuratorum, ad tot terminos continuatæ, quot fuerint combinandæ res. Quare cum ibidem sit ostensum, posito numero terminorum n summam seriei cujusvis c esse

$$\frac{n . n - 1 . n - 2 . n - 3 n - c + 1}{1 . 2 . 3 . 4 c}$$

, sequitur, eandem hanc quantitatem exprimere quoque numerum combinationum, sumtis n pro multitudine rerum combinandarum, & c pro exponente combinationis.

Patet autem, quantitatem istam designari per geminam progressionem arithmeticam, unam à numero rerum descendentem, ascendente ab unitate alteram, quarum communis excessus est unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens c : quippe cum in utrâque differentia primi & ultimi termini sit $c - 1$. Unde talis emergit

Regula

pro inveniendis Combinationibus secundum datum exponentem:

Fiant duæ Progressiones Arithmeticæ, una descendens à numero rerum combinandarum, altera ascendens ab unitate, quarum communis differentia sit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens: tum factum ex ductu terminorum prioris progressionis dividatur per factum ex ductu terminorum posterioris. Quotiens erit quæsitæ combinationum, quæ secundum datum exponentem institui possunt, multitudo.

Ita ex. gr. ex 10 diversis rebus sumi possunt quaternarii

$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \infty \frac{5040}{24} \infty 210.$$

Nota: Si plusculæ res ad combinandum sint propositæ, præfertim secundum exponentem itidem majusculum; ut si propositum sit inquirere, quoties ex rebus centum vicenæ possint accipi, supputatio secundum regulam instituenda perquam prolixa & tædiosa evaderet, excrecente producto multiplicationis ad 40 usque notas. Quare tum, ut quæsitum compendio consequamur, poterimus terminos progressionum ante multiplicationem per communes divisores tollere, hâc ratione:

100.99.98.97.96.95.94.93.92.91.90.89.88.87.86.85.84.83.82.81

1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.

Divido utrumq; fractionis terminum per 9. 11 ∞ 99, per 8. 12 ∞ 96, per 7. 13 ∞ 91, per 6. 14 ∞ 84, per 5. 17 ∞ 85, & per 2. 3. 15 ∞ 90, delendo numeros alteros ex numeratore, ex denominatore alteros, ut fractio ad minores terminos reducta sit hæc:

100.98.97.95.94.93.92.89.88.87.86.83.82.81

1.4.10.16.18.19.20

Deinde

$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6}$. &c. successivè producit $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$, $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$,
 $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$. &c. qui juxta regulam sunt numeri binionum, ternio-
 num, quaternionum, quinionum, senionum &c. Unde cum prio-
 rum factorum $\frac{7}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{4}$ singuli sint majores unitate, reliqui $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{6}$
 &c. unitate minores, sequitur, successiva producta ex istis facto-
 ribus, hoc est, numeros combinationum aliquousque continuè cres-
 cere, & postmodum iterum decrefcere debere. Quòd verò crescant,
 donec exponens combinationis dimidium rerum numerum attingit,
 inde liquet, quòd fractionum istarum $\frac{8}{1} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{4}$. &c. (ex quarum
 continuo ductu numeri combinationum resultant, quarumque pri-
 mus numerator perpetuò rerum numerum, denominator primus uni-
 tatem æquat) termini superiores & inferiores pro unoquoque se-
 quentium exponentium binario sibi propiores fiunt (illis unitatis de-
 crementum, his incrementum passis) proindeque se mutuò assequun-
 tur in tot terminis, quot indicat semissis primi numeratoris sive di-
 midius rerum datarum numerus; post quos terminos ipsi denomina-
 tores suis vicissim numeratoribus majores fiunt, & ab iis majori sub-
 inde intervallo recedunt.

Cor. 2. Duo exponentes, qui simul componunt ipsum rerum
 numerum (quos *parallelos* vocabimus) combinationes habent æquè
 multas. Sic in rebus octo tot habentur septenarii quot unitates, tot
 senarii quot binarii, & tot quinary quot ternarii, propter $8 \propto 7 + 1$
 $\propto 6 + 2 \propto 5 + 3$. Huc refer propr. 6 & 7 Tab. num. fig. Ratio e-
 videns: Quoties enim ex rebus octo ex. gr. binæ accipiuntur toties
 utique aliæ senæ relinquuntur: ergò toties quoque è converso senæ
 possunt accipi, sumtis nimirum iis quæ relinquebantur antea & reli-
 ctis quæ sumebantur. Idem ex præscripto regulæ sic evincitur: Juxta
 illam numerus binariorum in rebus octo est $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$; adjiciantur nume-
 ratori & denominatori factores progressivi æque-multi, quoad ad-
 jectorum ultimus in denominatore primo adjectorum in numeratore
 æquetur, scil. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$; sic factum ex adjectis æquatur unitati, nu-
 meratoribus & denominatoribus inverso ordine se mutuò destru-
 entibus; ipsumque adeò productum integrum $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ non dif-
 fert

fert à numero binariorum $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$: patet autem facile, productum illud indigitare numerum senariorum, seu combinationum quarum exponens unà cum binario datum rerum numerum complet; quandoquidem primus adjectorum in numeratore (qui per hyp. postremo adjectorum in denominatore, h. e. ipsi combinationis exponenti æquatur) à primo omnium seu ipso rerum numero tot unitatibus differt, quot ipsum alii præcedunt, hoc est, quot unitates habet exponens combinationum, quarum numerum præcedentes factores $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$ insinuabant.

Cor. 3. Exponens æqualis semissi numeri rerum, si datus rerum numerus est par; aut duo exponentes contigui quorum summa constituit rerum numerum, si hic est impar, suppeditant maximum numerum combinationum. Fluit ex præcedd Corollariis. Nam ex. gr. in rebus octo numeri septenariorum & unitatum, senariorum & binariorum, quinariorum & ternariorum æquantur. per 2. Coroll. Cùm ergò plures dentur quaternarii, quàm ternarii, binarii vel unitates per 1. Cor. etiam plures erunt quaternarii, quàm combinationes secundùm ullum alium exponentem. Similiter in rebus novem numeri octonariorum & unitatum, septenariorum & binariorum, senariorum & ternariorum, quinariorum & quaternariorum æquantur per 2. Cor. Cùm igitur quaternarii & quaternarii quoad suos exponentes sint medio numeri rerum proximi, patet eorundem numeros omnium reliquorum maximos esse, per 1. Cor.

Cor. 4. Numerus combinationum rerum quocunque secundùm exponentem quemlibet ejusve parallelum æquatur numero permutationum rerum totidem, quæ duùm tantùm sint generum talesque ut res ejusdem generis numero conveniant cum exponentibus parallelis combinationum; putà, tot sunt, ternarii vel quaternarii, in rebus 7, quot permutationes rerum totidem, si tres ipsarum sunt eadem, & reliquæ quatuor eadem. Nam numerus ternariorum juxta regulam $\propto \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \text{ in } 1 \cdot 2 \cdot 3} \propto$ numero permutationum dictarum per Reg. 2. Cap. I hujus.

Cor. 5. In quolibet rerum numero, multitudo combinationum secundùm datum exponentem æquatur summæ combinationum
secun-

secundum exponentem antecedentem & datum in numero rerum præcedenti; ex gr. tot sunt quaterniones in rebus decem, quot terniones & quaterniones simul in rebus novem. Namque per regulam numerus quaternionum in rebus decem $\infty \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \text{ in } 6 + 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
 $\infty \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty$ numero quaternionum plus numero ternionum in rebus novem. Aliter ita: Una decem rerum datarum vocetur A; manifestum, tot dari præcisè quaternarios in quibus A non reperitur, quot quaternarii ex reliquis novem possunt accipi; tot verò esse alios in quibus reperitur A, quot terniones comprehenduntur in novem cæteris, siquidem singulis istis ternionibus adjectum ipsum A totidem quaterniones efficit, quos omnes A ingreditur ex construct. Quare cum quaterniones illi in quibus reperitur A, & in quibus non reperitur, exhauriant omnes quaterniones possibiles ex datis rebus accipiendos, constat propositum. Conf. propr. 4 & 5 Tab. num. fig.

Cor. 6. Numerus combinationum secundum omnes exponentes pares (incluso nullione) æquatur numero combinationum secundum omnes impares, proinde utervis semissis est numeri omnium combinationum simpliciter (incluso quoque nullione) h. e. cum iste in rebus n sit 2^n per Reg. cap. 2. utervis illorum erit 2^{n-1} . Demonstratum habetur ibidem ad calcem dicti capituli, sed idem quoque ex præced. Coroll. sic deducitur: In rebus ex. gr. novem est unus novenarius, sicut in rebus decem unus denarius, deinde utrobique est unus nullio, ac præterea tot sunt unitates & binarii simul in rebus novem, quot soli binarii in rebus decem; tot ibi ternarii & quaternarii simul, quot hîc soli quaternarii; tot quinary & senarii ibi, quot hîc senarii; tot denique septenarii & octonarii ibi, quot soli octonarii hîc, per præced. Coroll. 5. quare numerus omnium simpliciter combinationum rerum novem æquatur numero combinationum rerum decem secundum exponentes pares. Rursus, per idem Coroll. tot habentur in rebus novem nulliones & unitates simul, quot unitates tantum in rebus decem; tot ibi binarii & ternarii simul, tot quaternarii & quinary, tot senarii & septenarii, tot denique octonarii & novenarii, quot hîc seorsim ternarii, quot quinary, quot septena-

septenarii & quot novenarii: quocirca numerus omnium simpliciter combinationum rerum novem æquatur etiam numero combinationum rerum decem secundum exponentes impares. Ergo numeri combinationum rerum decem secundum exponentes pares & secundum impares inter se æquantur. Ecce rem in synopsi:

Exponentes Combinat.

Res Com-	X	0	+	II	+	IV	+	VI	+	VIII	+	X								
binar-	IX	0	+	I	+	II	+	III	+	IV	+	V	+	VI	+	VII	+	VIII	+	IX
d.e.	X	I	+	III	+	V	+	VII	+	IX										

Superfunt nobis hîc loci nonnullæ quæstiones enodandæ, quæ circa combinationum materiam formari possunt, suumque aliquando usum habent; ut, cum indagandum proponitur, in quot combinationibus una pluresve res imperatæ sive conjunctim sive divisim reperiantur. Ejusmodi quæstiones cum in infinitum multiplicari possint, omnes ad unum genus Problematis reducere conabimur, quod universaliter sic enunciamus: Dato numero rerum combinandarum & exponente combinationis inveniendum sit, in quot combinationibus ex aliquot designatis rebus nonnullæ, quæ & ipsæ præscriptæ & determinatæ sint, exclusis cæteris reperiantur; puta, si ex numero rerum omnium n , combinatorum secum invicem secundum exponentem c , designentur aliquæ A, B, C, D, E , quarum numerus sit m , sive major sive minor exponente c , & quærat in quot combinationibus designatarum nonnullæ A, B, C , quarum numerus sit b , unâ junctæ reperiantur exclusis cæteris D & E . Dico, Problematis generaliter sic concepti solutionem non minus promptam esse, ac specialis cujusvis casus; & numerum combinationum quas recipiunt res $n - m$ secundum exponentem $c - b$ (quique numerus per Regulam invenitur

$$\frac{n - m . n - m - 1 . n - m - 2 . n - m - 3 . . . n - m - c + b + 1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . c - b}) \text{ ipsi confe-}$$

stim quæsito satisfacere. Nam quia numerus rerum combinatorum est n , & designatarum ex illis m , erit exemptis designatis reliquarum numerus $n - m$, quas si combines inter se secundum exponen-

O tem

176

tem $c - b$, habebis novas combinationes, in quibus nulla designatarum reperitur; quare si illarum singulis adjungas præscriptas A, B, C, quarum numerus ponitur b , fiet tum utique combinationum exponens c , ipsæ verò combinationes singulæ comprehendent ex designatis solas A, B, C, seclufis reliquis, quod imperatum fuit. Quòd si numerus b , earum ex designatis, quæ combinationes optatas ingredi debent, sit quidem determinatus, ipsæ verò res non sint determinatæ, sed quomodolibet ex designatis accipiendæ; patet, numerum combinationum hinc toties multiplicari, quoties ex designatis m rebus diversæ b res eligi possunt, nempe per regulam

$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots m - b + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b}$ vicibus; sic ut tum numerus combi-

nationum quæsitus sit $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots m - b + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b}$ in

$\frac{n - m \cdot n - m - 1 \cdot n - m - 2 \dots n - m - c + b + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c - b}$

Nota, si $n - m < c - b$, nulla institui potest combinatio, quæ præscriptam conditionem habeat. Sed hæc ad nonnullos speciales casus applicabimus:

Quæritur primò, in quot combinationibus reperitur data quælibet res? Quia hîc designatur res unica, erit $m \& b \infty 1$, adeoque

$\frac{n - m \cdot n - m - 1 \cdot n - m - 2 \dots n - m - c + b + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c - b} \infty \frac{n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \dots n - c + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c - 1}$

∞ numero combinationum quæsitò, qui quidem ad numerum omnium combinationum $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \dots n - c + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c}$ se habet ut c ad n ,

exponens scil. combinationis ad numerum rerum combinatorum, uti constat, si utraque fractio dividatur per

$n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \dots n - c + 1$, & multiplicetur per $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c$.

2. Sunto jam designatæ res duæ A & B, & definiendus sit combinationum numerus, in quibus reperitur A absque B. Quia hîc $m \infty 2$, & $b \infty 1$, erit numerus quæsitus $\frac{n \cdot 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4 \dots n - c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c - 1}$,² cujus proinde duplum, numerum combinationum denotabit, in quibus alterutra ipsarum A & B absque alterâ reperitur.

3. Porrò si quærat, in quot combinationibus reperiantur ambæ

ambæ A & B; fiet, propter $m \infty 2$ & $b \infty 2$, optatus numerus

$$\frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot \dots \cdot n-c+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c-2}.$$

4. Sin quærat, in quot combinationibus neutra designatarum reperiatur, invenitur, ob $m \infty 2$ & $b \infty 0$, quæsitæ combinationum multitudo

$$\frac{n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot \dots \cdot n-c-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c}.$$

5. Ita etiam si rerum designatarum tres sint, & quæstio sit, quot combinationes ingrediantur duæ A & B absque tertiâ C; quo casu m valet 3 & b 2; quæsitus combinationum numerus invenitur

$$\frac{n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \cdot \dots \cdot n-c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c-2}.$$

Et quia ex tribus ter binæ possunt accipi, triplum illius numerum combinationum exhibebit, quas duæ designatarum quæcunque exclusâ tertiâ ingrediuntur. Atque ita porro in aliis.

Appendix: Explicatâ numerorum figuratorum naturâ, usuque quem in combinationibus præstant, instituti nostri filum tantisper deferemus, promissi in fine Propos. 7 Part. I facti memores, donec porro hîc ostenderimus, quomodo expectationes duorum collusorum indefinitè ad quotvis deficientes lusos in symbolis exhiberi possint, quod olim quoque Pascalium occupavit; Duo autem præstò sunt modi, quibus id consequi licet: unus reconditior, ex constructione Tabellæ ibidem insertæ & consideratione progressionis, quam numeri illius inter se servant, petitus; quem nunquam se assequi potuisse scribit Pascalius in epistolâ ad Fermatium, ut legere est in hujus operibus Tolosæ impressis A. 1679, p. 180: alter magis planus & obvius, ex combinationum doctrinâ immediatè dimanans, quo Auctor ille in suâ Problematis solutione videtur usus.

I. *Mod.* Sint duo collusores A & B, quorum illi n , huic m ludi ad vincendum desint, & quærenda sit utriusque expectatio, h. e. quærendus sit in dictâ Tabellâ numerus areolæ n columnæ verticalis m . Adjecti intelligantur in columnarum capitellis tot termini progressionis duplæ ab unitate, quota est unaquæque inter columnas; unus primæ, duo secundæ, tres tertiæ columnæ &c. hoc pacto:

	I.	II.	III.	IV.	V.
	I	1	1	1	1
	2	2	2	2	2
	4	4	4	4	4
	8	8	8	8	8
	16	16	16	16	16
I	I : 2	3 : 4	7 : 8	15 : 16	31 : 32
2	I : 4	4 : 8	11 : 16	26 : 32	57 : 64
3	I : 8	5 : 16	16 : 32	42 : 64	99 : 128
4	I : 16	6 : 32	22 : 64	64 : 128	163 : 256

Et apparebit primo intuitu, progressionem has duplas ordine continuari per denominatores fractionum in columnis, adeo ut denominator areolae n columnae cujuslibet m sit terminus $m + n$ progressionis duplae ab unitate, i. e. potestas binarii, cujus exponentis $m + n - 1$, sive, $2^{m + n - 1}$. Ad numeratores vero fractionum quod attinet, perpendi debet quod unusquisque eorum ex constructione Tabellae loc. cit. insinuatam aequetur duobus aliis, quorum unus illi immediate supra, alter ad sinistram positus est; hinc enim inferri potest, numeratorem areolae n columnae cujuslibet aequari quoque summae omnium n numeratorum columnae praecedentis una cum terminis ipsi in vertice adjectis ac praeterea unitati; indeque porro haud difficilius colligitur, quod series numeratorum secundae columnae (una cum terminis ipsi praefixis) discerpi possit in duas alias series, tertiae in tres, quartae in quatuor, & generaliter columnae cujuslibet m in alias m series, &c. quarum primae semper sint series monadum, secundae series lateraliu cum una in vertice cyphra, tertiae series trigonalium cum cyphris duabus, quartae pyramidalium cum cyphris tribus, & ita deinceps, hac ratione:

Unde

			IV.			V.				
III.			I+0+	0+	0	I+0+	0+	0		
II.			I+1+	0+	0	I+1+	0+	0		
I.			I+2+	1+	0	I+2+	1+	0		
I	I+1	I+2+	I	I+3+	3+	I	I+4+	6+	4+	I

1	I	I+2	I+3+	3	I+4+	6+	4	I+5+	10+	10+	5
2	I	I+3	I+4+	6	I+5+	10+	10	I+6+	15+	20+	15
3	I	I+4	I+5+	10	I+6+	15+	20	I+7+	21+	35+	35
4	I	I+5	I+6+	15	I+7+	21+	35	I+8+	28+	56+	70

Unde cum terminus $m + n$, per confect. Cap. 3 hujus, in serie monadum sit 1, in serie lateralium $\frac{m+n-1}{1}$, trigonalium $\frac{m+n-1 \cdot m+n-2}{1 \cdot 2}$, pyramidalium $\frac{m+n-1 \cdot m+n-2 \cdot m+n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ &c. & generaliter in m serie $\frac{m+n-1 \cdot m+n-2 \cdot m+n-3 \cdot \dots \cdot m+n-m+1 (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m-1}$; erit numerator areolæ n columnæ cujuslibet m , $1 + \frac{m+n-1}{1} + \frac{m+n-1 \cdot m+n-2}{1 \cdot 2} + \frac{m+n-1 \cdot m+n-2 \cdot m+n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ usque ad $1 + \frac{m+n-1 \cdot m+n-2 \cdot m+n-3 \cdot \dots \cdot n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot m-1}$. Et quia per Cap. 4. iisdem hujus quantitatis membris etiam multitudo denotatur nullionum, unionum, binionum, ternionum &c. in rebus $m+n-1$ comprehensorum, sequitur dictum numeratorem conflari ex aggregato omnium nullionum, unionum, binionum, cæterarumque ordine combinationum rerum $m+n-1$ usque ad illas inclusive combinationes, quarum exponens sit $m-1$: idemque proin aggregatum divisum per 2^{m+n-1} exhibiturum totam fractionem datæ areolæ, h. e. per hyp. optatam expectationem collusoris A, seu partem depositi 1, quæ collusori debetur, cui n ludi deficiunt, dum alteri ludi m . Nota: si $m \infty n+1$, hoc est, si collusori B unus tantum lusus deficiat amplius quàm ipsi A, portio depositi quæ huic debetur æqualis censebitur aggregato combinationum re-

rum 2^n , à nullione ad illas inclusivè quæ habent n pro exponente, divisio per 2^{2^n} (qui numerus est omnium simpliciter combinationum rerum 2^n per Cap. 2) Hinc ergò si demas semissem omnium simpliciter Combinationum (nempe à nullione ad dimidium earum numerum quæ exponente n gaudent, uti colligitur ex Coroll. 2 & 3 hujus) divisum per integram summam omnium absolutè combinationum, h. e. si demas $\frac{1}{2}$ (partem depositi quam contulit collusor A) relinquetur pro lucro ipsius A. sive pro eo quod ipsi ex pecuniâ alterius debetur, semissis combinationum secundùm solum exponentem n divisus per summam omnium absolutè combinationum 2^{2^n} ; qui quidem semissis cùm se habeat ad $\frac{1}{2}$ (id quod deposuit alter B) ut integer numerus combinationum secundùm exponentem n dictâ ratione divisus (hoc est, per Reg. cap. hujus, ut $\frac{2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} \dots n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}$ divisus per 2^{2^n}) ad 1, manifestum facit, partem quæ debetur collusori A ex eo quod deposuit alter B, exprimi per $\frac{2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} \dots n + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}$ div. per 2^{2^n} . Ex. gr. si $n \infty 8$ & $m \infty 9$, h. e. si collusori A deficiant 8 lusus, ipsique B 9, debebitur illi ex pecuniâ hujus portio, $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ &c. div. per 2^{16} , quæ portio factoribus paribus numeratoris reâpse octies per 2 divisis, & singulis factoribus denominatoris per 2 multiplicatis reducitur ad fractionem $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}$ oriundam ex divisione producti octo primorum imparium per productum totidem primorum parium numerorum. Ipsa solutio Pascaliana, quæ Auctori suo tantopere arrisit.

II. *Mod.* Alter modus solvendi Problema, qui ex consideratione combinationum immediatè fluit, sic habet: Disquiro, quot ludi instituendi sint, ut unus collusorum (nec nisi unus) numerum suorum lusuum necessariò compleat ac vincat; videoque requiri $m + n - 1$ ludos: etenim absolutis $m + n - 2$ ludis, quorum unus evicèrit $m - 1$, alter $n - 1$ sic ut utriq; unicus desit proximus lusus alterutrum collusorum infallibiliter victorem reddet. Fingo itaque institui ab ipsis $m + n - 1$ ludos non quòd paucioribus ludis alterutri constare victoria non possit quâ semel obtentâ finita est alea, sed quia re-

fidui

fidui ad $m + n - 1$ ludi, si maximè instituerentur, complendo quoque alterius numero non sufficiunt, eoque victori nequicquam præjudicare possunt) fingo inquam institui à collusoribus $m + n - 1$ ludos, & considero quòd ipse A deposito potiatur, quoties accidit ut alter B aut nullum, aut unum, aut duos, aut tres, &c. aut denique $m - 1$ horum ludorum, nec plures, evincat; id verò tot casibus contingere posse liquet, quot nulliones, uniones, biniones, terniones, &c. ac deniq; combinationes secundùm exponentem $m - 1$ in ludis $m + n - 1$ continentur. Quare cùm totidem casus habeat A ad obtinendum depositum 1, & reliquos ad perdendum, sitq; numerus omnium casuum 2^{m+n-1} ceu omnium simpliciter combinationum; erit ipsius fors per 1. Cor. 3. Prop. 1. part. æqualis aggregato dictarum combinationum (à nullione ad illas inclusivè, quæ exponente $m - 1$ gaudent) diviso per 2^{m+n-1} , ut supra. Nota: si numeri deficientium lusuum m & n exiguo differant, satius est quærere per 5. Coroll. cit. Prop. quantitatem solius lucri, seu quantitatem expectationis collusoris A non respectu totius depositi sed respectu solius pecuniæ alterius. Ex. gr. sit $m \infty n + 1$, adeoque $m + n - 1 \infty 2n$; denotabitur numerus casuum, quos habet A ad obtinendam pecuniam alterius (quæ nunc sit 1) per numerum combinationum in ludis $2n$ ab exponente 0 usque ad exponentem n ; & numerus casuum, quos habet ad perdendum tantundem, h. e. ad obtinendum -1 , per numerum reliquarum combinationum secundùm exponentes superiores: quare cùm bini exponentes paralleli, inferior & superior, per Cor. 2 hujus combinationes habeant æque-multas, eoq; se mutuo destruant, relinquentur pro excessu, quo numerus illarum combinationum harum numerum superat, solæ combinationes secundùm exponentem n semissem ipsius $2n$, quarum numerus est $\frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \dots n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}$, sic ut inde per dictum Coroll. 5. lucrum collusoris A respectu pecuniæ alterius emergat $\frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \dots n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n}$ div. per 2^{2n} , itidem ut supra. Neque absimili modo definietur hoc lucrum in casu $m \infty n + 2$, aut $m \infty n + 3$ &c. Reperio autem, quòd dato numero n , lucrum ipsius A in casu $m \infty n + 1$, sit ad lucrum illius in casu $m \infty n + 2$, in

in ratione $n + 1$ ad $2n + 1$; & lucrum in casu $m \infty n + 2$, ad lucrum in casu $m \infty n + 3$, in ratione $2n + 4$ ad $3n + 4$. &c.

In gratiam eorum, qui speculationibus numerorum delectantur, obiter adhuc addo duas proprietates Tabellæ Prop. 7. Part. 1 subnexæ è quarum utrâvis idem quæsitum exsculpi potuisset. Una est, quòd numeratores columnæ verticalis tertiæ sint Trigonaes 3, 6, 10, 15, 21. &c. aucti numeratoribus columnæ 2^{dæ} 4, 5, 6, 7, 8, &c. quòd numeratores col. quartæ sint Pyramidales 4, 10, 20, 35, 56, &c. aucti numeratoribus 3^{tia} 11, 16, 22, 29, 37, &c. numeratores columnæ 5^{tæ} Triang. Pyramidales 5, 15, 35, 70, 126, &c. aucti numeratoribus 4^{tæ} 26, 42, 64, 93, 130, &c. incipiendo perpetuò à secundis terminis. Altera, quòd numeratores col. 3^{tia} sint Trigonaes 6, 10, 15, 21, &c. aucti numeratoribus primæ 1, 1, 1, 1, &c. numeratores 4^{tæ} Pyramidales 10, 20, 35, 56, &c. aucti numeratoribus 2^{dæ} 5, 6, 7, 8, &c. numeratores 5^{tæ} Triang. Pyramidales 15, 35, 70, 126, &c. aucti numeratoribus 3^{tia} 16, 22, 29, 37, &c. initio semper facto à tertiis; atque sic porrò.



C A P. V.

Invenire numerum combinationum, cum quælibet rerum combinandarum à cæteris quidem diversa existit, attamen sæpiùs in eâdem combinatione recurrere potest.

IN Combinationibus præcedd. capitum nullam rem secum ipsâ jungi, neque aded plus semel in eâdem combinatione accipi posse supposuimus; nunc verò hanc insuper conditionem adjiciemus, ut unaquæque res etiam secum ipsâ jungi, adeoque in eâdem combinatione sæpiùs redire queat.

Sunto igitur combinandæ hâc ratione literæ *a, b, c, d, &c.*

Fiant

Fiant tot series quot literæ, & singularum capita occupent singulæ literæ, ceu totidem uniones, ut factum cap. 2.

Pro binionibus cujusque seriei inveniendis, litera, quæ ejus caput est, non tantum cum omnibus præcedentibus literis, ut ibi factum fuit, sed & secum ipsâ combinari debet: sic habebitur in primâ serie unus binarius *aa*; in secundâ duo binarii *ab*, *bb*; in tertiâ tres *ac*, *bc*, *cc*; in quartâ quatuor *ad*, *bd*, *cd*, *dd*. &c.

Sic etiam pro formandis ternariis unaquæque litera non modò omnium præcedentium serierum, sed & suæmet seriei binariis adjungenda: ut habeantur, in primâ serie ternarius unus *aaa*; in secundâ ternarii tres *aab*, *abb*, *bbb*; in tertiâ sex *aac*, *abc*, *bbc*, *acc*, *bcc*, *ccc*; & sic deinceps.

Atque hoc ipsum quoque in combinationibus omnium aliorum exponentium observandum; quâ ratione nullam electionum, quæ circa datas res institui queunt, præteriri posse liquidò constat. En Schema:

<i>a.</i>	<i>aa.</i>	<i>aaa.</i>																															
			<i>b.</i>	<i>ab.</i>	<i>bb.</i>	<i>aab.</i>	<i>abb.</i>	<i>bbb.</i>																									
									<i>c.</i>	<i>ac.</i>	<i>bc.</i>	<i>cc.</i>	<i>aac.</i>	<i>abc.</i>	<i>bbc.</i>	<i>acc.</i>	<i>bcc.</i>	<i>ccc.</i>															
																			<i>d.</i>	<i>ad.</i>	<i>bd.</i>	<i>cd.</i>	<i>dd.</i>	<i>aad.</i>	<i>abd.</i>	<i>bbd.</i>	<i>acd.</i>	<i>bcd.</i>	<i>ccd.</i>	<i>add.</i>	<i>bdd.</i>	<i>cdd.</i>	<i>ddd.</i>

Hinc verò haud difficulter colligimus, uniones omnium serierum rursus efficere seriem monadum, biniones seriem lateralium, terniones trigonalium, cæterasque combinationes majorum exponentium itidem constituere series aliorum figuratorum altioris generis, prorsus ut combinationes præcedd. capitum, hoc solo cum discrimine, quòd ibi series à cyphris, hîc ab ipsis statim unitatibus incipiant; unde si in Tabulam redigantur, hanc dispositionem præferent;

Numeri Rerum Combinandarum.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824
7	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376
6	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
5	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365
4	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabula Combinatoria.
Exponentes Combinationum.

Tabulæ autem ita dispositæ duas præcipuè proprietates notare convenit: 1. Quòd columnæ transversæ congruunt verticalibus, prima primæ, secunda secundæ, tertia tertiæ, &c. 2. Quòd sumtis duabus columnis contiguis, sive verticalibus sive transversis, termi-

terminorum numero æqualium, summa terminorum columnæ præcedentis æquatur postremo termino columnæ sequentis.

E quibus facile est, invenire summam terminorum seriei cujusvis, adeoque & numerum combinationum secundùm exponentem quemcunque. Nam si numerus terminorum, hoc est, rerum combinandarum dicatur n , erit summa unionum seu terminorum seriei primæ, hoc est, ultimus terminus seriei secundæ, itidem n .

Intelligatur seriei secundæ præfixa cyphra, ut numerus terminorum fiat $n + 1$; per cujus dimidium si multiplicetur terminus ultimus n , erit productum $\frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}$ summa binionum seu terminorum secundæ seriei, per 12 propr. cap. 3; adeoque & postremus terminus tertiæ, per 2 propr. hujus.

Intelligentur seriei tertiæ præfixæ duæ cyphræ, fietque numerus terminorum $n + 2$; in cujus trientem si ducatur terminus ultimus modò inventus $\frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}$ exurget $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ summa ternionum seu terminorum seriei tertiæ, & simul etiam postremus 4tæ. per easdem.

Eâdem ratione summa terminorum quartæ seriei seu quaternionum invenitur $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, quintæ seriei seu quinionum $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \cdot n + 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$; & in genere summa terminorum seriei c , seu combinationum secundùm exponentem c , reperitur $\frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \dots n + c - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c}$. Ubi notandum, quòd existente $c > n$ factores fractionis possunt abbreviari dividendo numeratorem & denominatorem per $n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \dots c$, ut habeatur $\frac{c + 1 \cdot c + 2 \cdot c + 3 \dots c + n - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n - 1}$; & quia hæc fractio ad formulam exacta simul indicare debet summam $c + 1$ terminorum seriei $n - 1$, sequitur quòd aggregatum n terminorum in serie c semper æquetur aggregato $c + 1$ terminorum in serie $n - 1$; quæ alia non inelegans hujus Tabellæ proprietas est. Inde verò resultat sequens

Regula

pro inveniendis combinationibus secundum datum exponentem, cum eadem res eandem combinationem sapius ingredi potest.

Fiant duæ Progressiones Arithmeticæ ascendentes, altera à numero rerum combinandarum, ab unitate altera, quarum communis excessus sit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens: tum factum ex ductu terminorum prioris progressionis dividatur per factum ex ductu terminorum posterioris; eritque quotiens quæsita combinationum secundum datum exponentem multitudo. Hoc sensu numerus quaternionum in 10 diversis rebus contentorum est $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{17160}{24} \infty 715$.

Nota: Si combinationis exponens sit major rerum numero (quod utique fieri posse in præsentè hypothesis liquet) compendiosius erit, inchoari priorem progressionem ab hoc exponente unitate aucto, & utramque fieri terminorum uno pauciorum, quàm sunt datæ res. Ita numerus combinationum secundum exponentem 10 in rebus 4 fit $\frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty \frac{1716}{6} \infty 286$.

Sed & numerum combinationum secundum plures exponentes ab unitate se aliquousque consequentes, hoc est, summam serierum quotcunque verticalium, nihilo difficilius venari licet: Cum enim ex. gr. 10 primi termini 4 primarum columnarum verticalium iidem sint qui 4 primi termini 10 primarum transversarum atque insuper summæ horum terminorum æquentur undecim terminis 4.^{te} columnæ verticalis demto solo primo seu unitate (singulæ scil. summæ singulis terminis, ut ex propr. 2.^{da} Tabellæ liquet) manifestum est, etiam 10 primos terminos 4 primarum columnarum verticalium, h. e. summam omnium unionum, binionum, ternionum & quaternionum sumendorum ex rebus 10, unitate deficere ab undecim primis terminis

nis columnæ 4^{tae}, hoc est, à numero quaternionum sumendorum ex rebus 11, hoc est, à numero combinationum sumendarum ex rebus unâ pluribus secundum datorum exponentium maximum. Quod idem etiam sic ostendo: Singulos quaterniones sumendos ex rebus undecim res undecima vel non ingreditur planè, vel ingreditur semel, vel bis, vel ter, vel quater; sed manifestum est, quaterniones, quos res undecima non ingreditur, esse illos ipsos quos decem reliquæ inter se formare possunt; nec minus perspicuum, quòd numerus illorum quos semel tantum dicta res undecima ingreditur, æquari debeat numero ternionum sumendorum ex 10 reliquis; sicut etiam numerus illorum quos bis ingreditur, numero binionum; & quos ter ingreditur, numero unionum: quandoquidem ternionibus semel, binionibus bis, & unionibus ter adjuncta quaterniones efficit: prætereaque constat, quòd unus sit quaternio, quem res undecima quater repetita constituit. Unde concluditur, numerum quaternionum comprehensorum in rebus 11, hoc est, unâ pluribus quàm sunt datae res, unitate excedere omnes simul uniones, biniones, terniones & quaterniones rerum datarum decem; nisi his quoque nullionem accensere velimus, quo casu ipsis æquabitur.

Quapropter, cum existente numero rerum datarum n , & exponentium maximo c , numerus combinationum hujus exponentis in rebus $n + 1$ per Reg. cap. 4. inveniatur

$$\frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4 \cdot \dots \cdot n+c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c},$$

fiet numerus combinationum rerum n secundum omnes exponentes ab 1 usque ad c (utpote unitate ab illo deficiens) $\frac{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4 \cdot \dots \cdot n+c}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c} - 1$. Quòd si c

majus sit ipso n , hoc est, exponentium maximus major rerum numero, poterunt fractionis termini eo casu dividi per

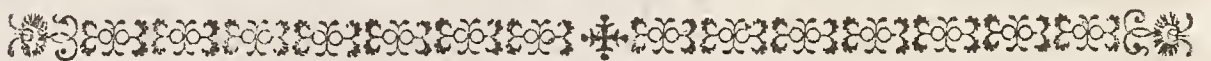
$$n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot \dots \cdot c,$$

ac proinde quantitas compendiosius exprimi, ita $\frac{c+1 \cdot c+2 \cdot c+3 \cdot \dots \cdot c+n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} - 1$. Hinc talis emergit

Regula.

pro inveniendis Combinationibus secundum plures exponentes ab unitate se consequentes:

CONSTITuantur duæ Progressiones Arithmeticæ ascendentes, altera à numero rerum combinandarum unitate aucto, ab ipsâ unitate altera, quarum communis excessus sit unitas, & utraque tot terminorum, quot unitatibus constat exponentium maximus. (Quòd si tamen exponentium maximus major sit rerum numero, satiùs est, priorem inchoari ab hoc exponente unitate aucto, & utramque fieri tot terminorum, quot sunt datæ res.) Tum factum ex ductu terminorum prioris progressionis dividatur per factum ex ductu terminorum posterioris; eritque quotiens quæsita combinationum multitudo, si scil. ipsum nullionem unà comprehensum velis; sin velis exclusum, quotiens unitate multatus quæsitum indicabit. Ita numerus omnium cum nullione unionum, binionum, ternionum & quaternionum in rebus 10 est $\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{24024}{24} \infty 1001$, in rebus tantum tribus $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty \frac{210}{6} \infty 35$; at nullione excluso numerus combinationum est ibi 1000, hîc 34.



CAPUT VI.

Invenire numerum combinationum, cum nonnullæ rerum combinandarum sunt eadem, nulla verò sæpiùs in combinatione repeti debet, quàm ipsa reperitur in toto rerum numero.

In

IN præced. capite licitum erat, quamlibet datarum diversarum rerum secum ipsâ conjungere toties in combinatione, quot unitates habet ejus exponens; quo pacto dari potest combinatio secundum exponentem quemlibet, quæ ex unâ solâ re sæpiùs repetitâ constet. Alia quæstio est, cum determinatus est numerus vicium, quibus unaquæque rerum datarum secum ipsâ jungi potest: ut cum combinandæ veniunt literæ a, b, c, d , eâ lege, ut in nullâ combinatione litera a sæpiùs quàm quinquies, b quàm quater, c quàm ter, & d quàm bis repetatur; ubi manifestum est, nullam earum combinationum, quarum exponens quinarium superat, ex unâ solâ literâ conflare posse.

Tantundem autem est, si quatuor istæ literæ dictâ lege inter se combinandæ sunt, acsi datæ forent literæ quatuordecim, interque illas quinque a , quatuor b , tria c & duo d , modis omnibus inter se combinandæ, sed eâ conditione, ut nulla sæpiùs in combinatione occurrat, quàm ipsa reperitur in toto rerum numero; hoc est, acsi data foret quantitas algebraica $aaaaabbbbcccd$ five $a^5b^4c^3d^2$, cujus omnes divisores quærentur; quandoquidem divisores alicujus quantitatis aliter non exprimuntur, nisi per totidem combinationes factorum ejus: adeò ut doctrina hujus capituli præcipuè pro inveniendò numero divisorum datæ alicujus quantitatis inservire queat.

Liquet primò, unius literæ a tot electiones aut divisores dari posse, quoties ipsa in rerum numero occurrit, seu quot ipsi in quantitate tribuuntur dimensiones; adeoque si nullionem electionibus vel unitatem divisoribus accensere quoque velis, unam dari electionem aut divisorem amplius, putà sex: $1, a, aa, a^3, a^4, a^5$.

Deinde, si litera b accedat, constat illam in singulas sex præcedentium electionum aut divisorum duci posse; unde totidem aliæ nascuntur electiones; $b, ab, aab, a^3b, a^4b, a^5b$. Quibus si alterum b adjungas, sex novas electiones habebis; $bb, abb, aabb, a^3bb, \&c.$ Et his si tertium b applicetur, sex aliæ electiones emergent, iterumque sex aliæ, si his applicetur quartum: adeò ut litera b toties sex novas electiones suppeditet, quoties ipsa in dato rerum numero occurrit, seu quot ipsa in propositâ quantitate dimensiones

obtinet:

obtinet; nimirum quater sex electiones; quas omnes *b* ingreditur ex constructione. Unde si his sex primas electiones, quas *b* non ingreditur, annumeres, habebis in universum quinquies sex sive 30 electiones.

In singulas porrò harum 30 electionum seu divisorum si tertia litera *c* ducatur, prodibunt 30 novæ electiones; & si prodituris eadem litera adjungatur denuò, prodibunt 30 aliæ; iterumque 30 aliæ, si applicetur tertium: unde ter 30 electiones exurgunt, in quibus omnibus lit. *c* reperitur. Quibus proin si addas præcedentes 30, in quibus illa non reperitur, numerabis in totum quater 30 sive 120 electiones.

Tandem si singulas harum 120 electionum vel divisorum eadem ratione per quartam literam *d* ob duas ejus dimensiones bis multiplices, produces bis 120 novas electiones, quæ omnes literam *d* continent; adeoque (computatis unà prioribus 120 quæ eandem non continent) omninò ter 120 sive 360 electiones. Et tantus quoque in universum divisorum numerus existit propositæ quantitatis $a^5 b^4 c^3 d^2$, dummodò, quòd hîc semper subintelligendum est, literæ *a*, *b*, *c* & *d* totidem primos ab unitate & à se invicem diversos numeros indigent. Patet autem, accessione cujusque literæ numerum omnium præcedentium electionum vel divisorum toties multiplicari, & semel ampliùs, quot literæ accedentis fuerint dimensiones. Quo observato ratio percipi potest sequentis Regulæ:

Regula

*pro investigando numero divisorum alicujus quantitatis
data, sive numero combinationum rerum plu-
rium, quarum nonnullæ sunt
eadem:*

Numeros dimensionum, quibus constant singulæ diversæ literæ quantitatem propositam constituentes, unitate auge, sicque auctos in se invicem ducito: erit productum eorum continuum numerus omnium
diviso-

divisorum datæ quantitatis, seu omnium combinationum, quarum literæ illam constituentibus sunt capaces. Ubi tamen unitatem demere memineris, si nullionem è combinationibus aut unitatem è divisoribus expunctam velis. Ex. gr. In quantitate propositâ $a^5 b^4 c^3 d^2$ literæ a, b, c, d dimensiones habent 5, 4, 3, 2, qui numeri unitate sigillatim aucti efficiunt 6, 5, 4, 3, hi verò in se ducti 360 numerum omnium cum nullione combinationum, seu omnium cum unitate divisorum quantitatis datæ.

Nota: Si numerus diversarum literarum a, b, c, d datam quantitatem constituentium sit n , omnesque literæ æquali dimensionum numero gaudeant, qui sit p ; fiet per regulam numerus combinationum vel divisorum $\frac{p+1}{p} n$. Et specialius si $p \infty 1$, hoc est, si datæ quantitatis singulæ literæ unam tantum dimensionem habent, aut si datæ res combinandæ omnes sunt diversæ, numerus divisorum vel combinationum determinatur ad 2^n , reditque hypothesis capituli secundi; cujus proinde solutio cum istâ conferri poterit, ut utriusque convenientia appareat.

Qui autem ad discursum præsentis capituli vel leviter attenderit, facile porro si opus determinabit, in quot electionibus vel divisoribus quælibet res aut litera reperiatur. Nam si quærat ex. gr. quot divisores propositæ quantitatis $a^5 b^4 c^3 d^2$ ingrediatur litera a , indagandum solummodò est, quot divisores inclusâ unitate admittat reliqua quantitas $b^4 c^3 d^2$; his enim (cùm in iis a non reperiatur) si literam istam adjungas semel, habebis omnes divisores, in quibus a reperitur unius dimensionis: & si adjungas bis, habebis omnes eos in quibus est duarum dimensionum: & si ter, illos in quibus trium &c. unde concluditur, tot esse divisores, in quibus litera quælibet secundum eundem dimensionum numerum reperiatur, quot reliquæ literæ in universum divisores admittunt: cùm igitur quantitas $b^4 c^3 d^2$ per regulam præced. recipiat 5. 4. 3 ∞ 60 divisores (connumerando illis unitatem) complectetur etiam quantitas $a^5 b^4 c^3 d^2$ divisores totidem, in quibus a unam obtinet dimensionem, totidemque in quibus duas, tres &c. dimensiones; adeoque ob quinque dimensiones ipsius a quinquies 60 sive 300 divisores obtinebit, in

quibus

quibus ista litera utcumque secundum aliquem dimensionum numerum occurrit. Neque difficilius definitur numerus electionum aut divisorum, in quibus reperiantur ex. gr. duæ literæ, a cum duabus & b cum tribus dimensionibus; nam si singulis divisoribus reliquæ quantitatis $c^3 d^2$ (quorum numerus per regulam invenitur $4 \cdot 3 \infty 12$) adjungas $a^2 b^3$, palàm est oriri totidem divisores optatæ conditionis, nec dari plures, & sic in aliis.

Plus difficultatis habere forsàn videbitur quæstio, quæ numerum inire iubet divisorum omnium ex æque-multis dimensionibus constantium, hoc est, combinationum secundum singulos exponentes seorsim. Ad id perquirendum methodum adhibeo, similem illi, quâ supra in part. 1, post prop. 9 ad numeros jactuum in tessellis investigandos fui usus: Scribo ordine omnes exponentes combinationum seu omnes dimensionum numeros, quarum proposita quantitas capax est, nempe à 0 usque ad 14 pro quantitate $a^5 b^4 c^3 d^2$. Sub horum primis colloco sex unitates, unâ vid. plures quàm est numerus dimensionum primæ literæ, quibus subjungo sex alias unitates, & his rursùm sex alias &c. donec habeam series unitatum unâ plures quàm est numerus dimensionum secundæ literæ, sed singulas series uno gradu dextrorsùm promoveo, atque tum addo quæ perpendiculariter in eodem gradu sibi respondent unitates, ut fiant numeri 1, 2, 3, 4, &c. Horum deinde numerorum iterum series unâ plures constituo quàm est numerus dimensionum tertix literæ, illas similiter gradatim ad dextram promovendo, & postmodùm addendo, ut prodeant numeri 1, 3, 6, 10, 14 &c. quorum numerorum mox rursùm ordines uno plures, quàm est numerus dimensionum quartæ, gradatim pono & addo, continuaturus eodem tenore ulterius, si plures literæ adessent. En Tabulam:

Numeri dimensionum seu Exponentes combinationum:

Quantit. sive Res combinande.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
a^5	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1					
$a^5 b^4$	1	2	3	4	5	5	4	3	2	1					
		1	2	3	4	5	5	4	3	2	1				
			1	2	3	4	5	5	4	3	2	1			
				1	2	3	4	5	5	4	3	2	1		
$a^5 b^4 c^3$	1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1		
		1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1	
			1	3	6	10	14	17	18	17	14	10	6	3	1
$a^5 b^4 c^3 d^2$	1	4	10	19	30	41	49	52	49	41	30	19	10	4	1

Quo facto qui ex additione ultimâ resultant numeri singuli, denotabunt multitudinem divisorum vel combinationum secundum singulos dimensionum numeros seu exponentes supra scriptos. Sic indicante Tabellâ reperio, quòd quantitas proposita habeat unum divisorem nullius, 4 divisores unius, 10 duarum, 19 trium &c. dimensionum, sive, quòd habeat unum nullionem, 4 uniones, 10 biniones, 19 terniones, & sic porrò; qui omnes collectivè sumti summam conficiunt 360, ut oportebat. Qui rationem similis operationis pro tesseris intellexerit, rationem hujus quoque non difficulter capiet.

Plura de his, divisoribus præsertim (at nimium ab instituto aliena) legere est in 5 prioribus sectionibus miscellaneis Exercit. Matth. Fr. Schootenii, nec non cap. 3 & 4 Dissert. Joh. Wallisii de combinationibus Tractatui ejus de Algebrâ subnexæ. Quos Auctores adeat qui volet. Nos properamus ad alia.



CAP. VII.

*De Combinationibus & Permutationibus
mixtim spectatis.*

IN Combinationibus, de quibus hucusque sermo nobis fuit, nulla ordinis sitûsque ratio habebatur, & unum eundemque ex. gr. ternarium constituere intelligebantur literæ a, b, c , quocunq; scriberentur ordine, seu abc , seu acb , seu bac &c. Sed quandoque præter complexionum varietatem ipsa quoq; ordinis & dispositionis variatio in rebus combinandis attendenda est; quemadmodum fieri solet in vocibus & numeris: Alia enim vox est vel syllaba ab , & alia ba ; & alius numerus 12 , alius 21 ; quanquam eadem literæ eademque notæ numerales concurrant ad formandas tum syllabas ab & ba , tum numeros 12 & 21 ; sic ut totum discrimen à diversâ earundem dispositione proficiscatur.

Restat itaque. ut hoc & sequentibus capitibus combinationum & permutationû doctrinam mixtim contemplemur, indagando, quàm variè plures diversæ res, aut quarum nonnullæ sunt eadem, & combinari secum invicem, & combinatæ inter se transponi possint, idq; nunc secundum unum exponentem, nunc secundum plures; & modo sic, ut nulla rerum datarum secum ipsa combinari debeat, modo sic, ut quælibet etiam secum ipsa combinari, pluriesque aded in eadem combinatione repeti queat.

1. *Invenire numerum electionum plurium diversarum rerum, quarum nulla secum ipsa combinari debet, secundum unum exponentem.*

Solutio quæstionis ex præcedentibus prompta est & facilis: Si multitudo rerum combinandarum dicitur n , atque exponens combinationis c , numerus combinationum neglectâ consideratione ordinis inter res combinatas est $\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot \dots \cdot n - c + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c}$ per cap. 4. Et quia singulæ hæ combinationes ex hypoth. constant rebus

bus diversis c , quæ per cap. 1. ordinem inter se variare possunt $1. 2. 3. 4. \dots c$ vicibus, sequitur, si & ordinis in combinationibus habeatur ratio, earum numerum totidem quoque vicibus majorem fore quàm ubi hæc consideratio negligitur, ac proinde æquari

$$\frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot \dots \cdot n - c + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c} \text{ in } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot c \infty$$

$n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot \dots \cdot n - c + 1$; id quod sequentem Regulam suggerit :

Regula

pro inveniendis numero combinationum secundum datum exponentem :

CONSTITUATUR Progressio Arithmetica, cujus communis differentia sit 1, incipiens à numero rerum combinandarum, & descendens per tot terminos, quot unitates habet combinationis exponens; eritque factum ex ductu terminorum ejus quæsita combinationum multitudo. Ex. gr. Quaterniones omnes in rebus 10, iique modis omnibus transpositi sunt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \infty 5040$.

Consectaria : 1. Si combinationis exponens ipsi rerum numero æquatur, tantundem est, acsi simplices permutationes rerum datarum quærentur; quippe cum omnes semper simul accipiendæ, quæ hypothesis est capituli 1: eritque tum

$$n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot \dots \cdot n - c + 1 \infty n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot \dots \cdot 1 \infty 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n, \text{ quod convenit cum regulâ cap. 1.}$$

2. Omnes res simul acceptæ, hoc est, combinatæ secundum exponentem æqualem rerum multitudini, tot recipiunt permutationes ordinis, quot recipiunt earundem combinationes omnes secundum exponentem unitate minorem : Ita res 5 toties disponi possunt diversimodè quinquæ, quoties quaternæ; nam permutationes omnes quinque rerum sunt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ seu $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ per regulam hujus & primi capituli; & permutationes quaternionum omnium sunt

Q 3

5 . 4

5.4.3.2 per eandem hanc regulam: est verò 5.4.3.2 ∞
5.4.3.2.1. unde liquet &c.

3. Summa unionum & binionum in rebus quotlibet æquatur quadrato numeri rerum: posito namque rerum numero n , unionum numerus juxta regulam est n , & binionum $n.n - 1$ ∞ $nn - n$; quorum summa $n + nn - n$ ∞ nn . Sic ex. gr. colligere possumus, 9 notas numerales significativas acceptas singulas & binas modis omnia constituit novies 9 seu 81 diversos numeros; totidem scil. ab 1 ad 100 reapse invenimus non plures, si ressecemus illos, quos vel cyphra ingreditur, vel idem geminatus character constituit.

4. Numerus combinationum secundum exponentem quemlibet æquatur numero permutationum rerum totidem, quarum tot sint eadem, quot unitates habet exponentis parallelus, reliquarum verò singulæ à singulis diversæ. Sic tot sunt ternarii in rebus 8, quot permutationes rerum 8, quarum 5 sunt eadem, nempe 8.7.6 ∞ $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4.5}$ ∞ num. permutat. per Reg. 2. cap. 1. hujus.

2. *Invenire numerum electionum plurium diversarum rerum, quarum nulla secum ipsa combinanda est, absolute seu secundum omnes exponentes.*

Si addantur numeri combinationum per præced. regulam secundum singulos exponentes seorsim quæsti obtinebitur numerus omnium combinationum absolute. Idem tamen paulò expeditius inveniri potest, si attendatur ad proprietatem aliquam non contemendam, quæ ex collatis duobus ejusmodi numeris elicitur.

Sint primò combinandæ res quatuor: (Constat per præced. reg. numerum unionum esse 4, binionum 4.3, ternionum 4.3.2, quaternionum denique 4.3.2.1; & propterea numerum omnium combinationum absolute 4 + 4.3 + 4.3.2 + 4.3.2.1.

Sint dein combinandæ res quinque; ubi simili modo colligitur, summam unionum, binionum, ternionum, quaternionum & quinionum, seu numerum omnium absolute combinationum esse 5 + 5.4 + 5.4.3 + 5.4.3.2 + 5.4.3.2.1. Est verò 5 + 5.4 + 5.4.3 + 5.4.3.2 + 5.4.3.2.1 ∞ 5 in

$1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, hoc est, numerus combinationum rerum 5 quinques major numero combinationum rerum 4 unitate aucto. Unde discimus, numerum combinationum in rebus quotcunque datis toties excedere numerum combinationum in rebus unâ paucioribus unitate auctum, quot sunt datæ res. (Intellige, non computato utroque nullione.)

Quocirca cùm unius rei unica sit electio, addito 1 ad 1 summâque 2 multiplicatâ per 2, erit productum 4 numerus omnium combinationum in rebus duabus.

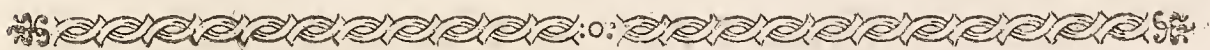
Rurfus addito 1 ad 4, summâque 5 multiplicatâ per 3, significabit productum 15 numerum combinationum in rebus tribus.

Similiter addito 1 ad 15, summâque 16 ductâ in 4, exurgit 64 numerus combinationum in rebus quatuor.

Hunc unitate auctum si ducas in 5, habebis omnes combinationes rerum quinque; atque ita porrò in infinitum, ut ex sequenti laterculo apparet.

Num. rer. datarum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	&c.
Num. combination.	1.	4.	15.	64.	325.	1956.	13699.	109600.	986409.	9864100.	&c.

Hâc ratione colligimus, 9 notas numerales, si sumantur singulæ, binæ, ternæ, &c. & tandem novenæ, ac transponantur modis omnibus, recipere 986409 mutationes, totidemque proin diversos numeros formari posse, in quorum nullo character aliquis plus unâ vice occurrat.



C A P U T V I I I.

3. *Invenire numerum electionum plurium diversarum rerum, cùm qualibet earum etiam secum ipsa combinari potest, secundum unum exponentem.*

In

IN cap. præced, quæsitus fuit combinationum numerus, quando nulla res plus semel in eâdem combinatione repeti poterat. Nunc supponemus, rem quamlibet etiam secum ipsâ jungi, adeoque bis, ter, quater pluriesvè in eâdem combinatione repeti posse; investigabimusque, quis hoc sensu futurus sit combinationum numerus, si in illis etiam, ut antea, attendatur ordinis varietas.

Sunto datæ res aut literæ quotlibet $a, b, c, d, \&c.$ quarum numerus sit m , patet illarum tot uniones posse accipi, quot sunt datæ res, putà m .

Applicetur iis prima litera a , præponendo illam singulis, ita: $aa, ab, ac, ad \&c.$ & habentur biniones, qui omnes incipiunt ab a , quorumque numerus æquari debet ipsi rerum numero m .

Deinde applicetur iisdem secunda b , præfigendo illam singulis, ut fiant $ba, bb, bc, bd \&c.$ qui omnes sunt biniones à b incipientes, quorum proinde numerus itidem ipsi m æquatur.

Simili ratione tertia c , & quarta d , cæteræque si plures fuerint, singulis datarum rerum semel præfigantur, & exurgent novi biniones, quorum nonnulli incipiunt à literâ c , alii à d , alii à cæterarum aliquâ; eorum verò numerus, qui ab eâdem literâ incipiunt, perpetuò ipsi m æquabitur. Quo pacto manifestum omnes in univèrsum biniones repertos esse, eosque modis omnibus inter se transpositos; quorum proinde numerus toties superabit ipsum rerum numerum, quot sunt datæ res: quarum cùm hic sit m , binionum omnium numerus erit mm .

His verò binionibus si denuò applicare pergas datas res, unicuique illorum singulas has præponendo, formabis omnes ternionum ordines $aaa, aab, aac, aad, aba, abb, \&c.$ quorum qui ab eâdem literâ incipiunt semper tot existunt, quot sunt inventi biniones; omniumque proin numerus binionum numerum toties excedet quot fuerint datæ res, ac consequenter erit m^3 .

Similiter si cunctis ternionibus identidem præfigi intelligantur singulæ literæ, elicientur omnes quaterniones possibiles, quorum per consequens numerus ternionum numerum rursus m vicibus superabit, eritque m^4 . Atque

Atq; ita apparet, combinationum numerum secundum quemcunque exponentem perpetuò m vicibus superandum esse à numero combinationum secundum exponentem proximè sequentem: scilicet cum numerus quaternionum sit m^4 , erit quinionum numerus m^5 , senionum m^6 , & generaliter si exponens dicatur n , numerus combinationum secundum hunc exponentem erit m^n . Unde expedita habetur

Regula

pro inveniendis numero combinationum modis omnibus permutatarum secundum datum exponentem, cum qualibet res etiam secum ipsa combinari potest.

Datus rerum numerus elevetur ad eam potestatem, cujus index est datus combinationis exponens; & habetur quæsitum. Ex. gr. Omnes novem notarum numeralium quaternarii sumti & dispositi modis omnibus exhibent $9^4 \infty 9.9.9.9 \infty 6561$ variationes; totidem scil. numeros diversos, rejectis iis qui cyphram unam pluresvè includunt, inter 1000 & 10000 (limites eorum qui 4 characteribus scribuntur) interjici necesse est. Sic 4 vocales A. E. I. O, quibus quadruplex differentia propositionum secundum quantitatem & qualitatem in Logicis innuitur, admittunt terniones $4^3 \infty 64$; unde totidem oriuntur modi syllogismi categorici boni malivè, non 36 tantum ut voluit Aristoteles cum Interpretibus. Quòd si indefinitæ & singulares propositiones ab universalibus & particularibus distinguerentur, unde octuplex earum nasceretur discrimen, numerus modorum omninò ad 512, cubum nim. octonarii, assurgeret.

4. Invenire numerum combinationum ejusmodi secundum plures exponentes

Quoniam ex iis quæ modò dicta sunt apparet, numerum unionum in datis rebus m esse m , binionum mm , ternionum m^3 , qua-

R

ternio-

ternionum m^4 &c. constat, numerum combinationum secundum exponentes plures ab unitate naturali ordine se consequentes, quorum ultimus sit n , fore $m + mm + m^3 + m^4 \dots + m^n$, summam scil. progressionis alicujus geometricæ secundum rationem 1 ad m , cujus primus terminus est m , & ultimus m^n ; quæque summa vulgò notâ methodo compendiosius exprimitur & unâ quantitate sic effertur: $\frac{m^n - 1 \text{ in } m}{m - 1}$, ita ut institutâ proportionem $m - 1$ sit ad m , ut $m^n - 1$ ad quæsitum: unde sequens manat

Regula

pro inveniendis numero combinationum secundum plures exponentes, quorum maximus est datus.

Flat, ut rerum datarum numerus unitate truncatus ad eundem integrum; sic illius potestas, quam indicat exponentium maximus, unitate truncata ad numerum quartum, qui optatam combinationum multitudinem exhibebit. Ex. gr. ad indagandum, quot diversis modis inter se transponi possint 10 notæ numerales, si accipiantur tum singulæ, tum binæ, ternæ, quaternæ, quinquæ & senæ: vel addi possunt sex primi termini progressionis geometricæ 10. 100. 1000. &c. vel, si videatur commodius, faciendum, ut 9 numerus notarum unitate minutus ad 10 eundem integrum, sic 999999 ejusdem potestas sexta sive quadrato-cubica unitate truncata ad quæsitum: utroque enim modo obtinetur 1111110 quæsitæ dispositionum multitudo.

Notandum verò, non omnes istas dispositiones efficere peculiare numeros; quotquot enim numeri à cyphris unâ pluribusve incipiunt, non differunt ab iis, quos soli characteres reliqui neglectis cyphris constituerent: quocirca ut discernantur utiles à superfluis, considerandum, quòd ex decem notis solitariis unica est inutilis, ipsa scil. cyphra: ex numeris, qui duabus constant notis, redundant 10; quandoquidem 0 singulis decem notis semel præponi potest: ex iis qui scribuntur notis tribus, superflui sunt 100; ipsa enim 0 aut ter
posita

posita est sola, aut bis præfixa singulis novem primis numeris, aut semel singulis inter 9 & 100 interceptis. Ita ex iis qui quatuor characteribus exprimuntur, supervacanei sunt 1000; singulis namque numeris, qui paucioribus notis scribuntur, quorumque si cyphram unâ complectaris sunt manifestò mille, præfigi potest una alteravé cyphra, ut notarum quaternarius compleatur. Ob similem rationem ex iis, qui scribuntur notis quinque, eliminandi 10000, & 100000 ex iis qui constant notis sex: adèd ut, si à numero 1111110
 $\infty 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000$, seu summa sex terminorum progressionis decuplæ incipientis à 10, auferas $111111 \infty 1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000$ summam totidem terminorum ejusdem progressionis incipientis ab unitate (quod compendio fit, auferendo solummodò primum terminum hujus ab ultimo illius, cùm reliqui omnes se mutuo destruant) residuum 999999 indicet numerum omnium differentium ordinum, qui tribui possunt 10 notis numeralibus non ultra senas acceptis, ad exprimendum per illos totidem numeros diversos. Prout sanè evidens admodùm est, quòd ab unitate numerando ad usque 1000000, primum & minimum eorum numerorum qui septem notis constant, inveniuntur præcisè 999999 differentes numeri; cùm numerus 999999, eorum qui sex scribuntur notis maximus & ultimus, immediatè excipiatur à 1000000, ab eoque solâ unitate differat.

Non secus iniri potest numerus omnium combinationum ac permutationum 24 litterarum Alphabeti, si fiat, ut 23 ad 24, sic vigesima quarta potestas numeri 24 (neglectâ unitatis ablatione, quâ in tam vasto numero non opus est) ad numerum quæsitum; qui per Logarithmos expedite invenitur constare debere 34 notis, & superare 1391 quinti-milliones. Tantus vid. est numerus omnium vocum utilium & inutilium, quæ ex 24 Alphabeti literis modis omnibus formari possunt, saltem si illas non ultra vicens quaternas combinari posse intelligas.

Notare hîc convenit peculiarem *συμπάθεια* inter combinationes istas & potestates multinomiorum: Cùm enim ad inveniendum biniones omnes litterarum *a, b, c, d*, singulæ cunctis sint præfigendæ, & ad inveniendum terniones omnes, cunctis binionibus singulæ lite-

ræ denuò applicandæ, & sic porrò, ut initio hujus capituli dictum; idemque etiam fieri soleat, ubi quantitas literalis $a + b + c + d$ du-
cenda est in se quadratè, cubicè &c. sequitur, easdem literas, si spe-
ctentur ut partes radicis alicujus multinomiæ, binionibus suis exhi-
bere omnia membra quadrati illius, ternionibus cubi, quaternioni-
bus biquadrati &c. adeò ut membra potestatis cujusvis aliter non ex-
primantur nisi per coacervationem combinationum partium radicis,
factarum secundùm exponentem æqualem potestatis indici: hoc tan-
tùm cum discrimine, quòd omnia illa membra, quæ iisdem con-
stant literis variè tantùm transpositis, cùm eandem quantitatem de-
signent, brevitatis studio in unum terminum conflari soleant, præfixo
illi membrorum æquivalentium numero, qui coëfficiens termini vo-
cari consuevit. Unde discere proclive est, quòd coëfficiens termini
cujusvis exprimat numerum permutationum literarum illum termi-
num constituentium, ipsa verò terminorum multitudo in quâvis po-
testate æquetur numero combinationum, quæ inter partes radicis ne-
glecto earum ordine secundùm indicem potestatis datæ institui pos-
sunt, quarumque numerus per cap. 5^{um} invenitur.

Quod observasse operæ pretium aliquando non exiguum erit,
cùm exinde promptè definiri possit tum multitudo terminorum, tum
termini cujusvis coëfficiens in quâcunque potestate. Ita, ex. gr.
decima potestas trinomi $a + b + c$, per reg. cap. 5^{ti} constabit ter-
minis $\frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} \infty 66$, quorum $a^5 b^3 c$ per reg. 2 cap. 1^{mi} coëfficientem
habebit $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \text{ in } 1 \cdot 2 \cdot 3 \text{ in } 1 \cdot 2} \infty 2520$. Pariter cubus radicis qua-
drimembris $a + b + c + d$ continebitur terminis $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty 20$, ejusq;
termini aab & abc pro suis coëfficientibus acquirant numeros 3 & 6.



C A P. IX.

*Invenire numerum electionum rerum pluri-
um, quarum nonnulla sunt eadem, nulla*
verò

verò sæpiùs in electione assumi debet, quàm ipsa reperitur in toto rerum numero.

Hypothesis hæc est capitis sexti, nisi quòd ibi omnes diversi ordines unius combinationis pro unâ eâdemque electione, hîc pro totidem diversis electionibus habendi sunt. De Problemate hoc sensu accepto nihil definitum invenio apud Auctores; ego quæsitum sequenti modo exploro: Sunt ex. gr. combinandæ & permutandæ modis omnibus literæ a, b, c , eâ lege, ut in nullâ combinatione a sæpiùs quàm quater, b quam ter, & c quàm bis occurrat, hoc est, ut aliter enunciem, sint combinandæ & permutandæ omnifariam literæ $aaaabbbcc$ seu $a^4 b^3 c^2$, quarum 4 sunt eadem, item tres aliæ, & rursus duæ aliæ eadem, sitque determinandus numerus harum combinationum, tam secundum singulos quàm secundum omnes exponentes. Constat, ante omnia electiones solius a^4 , incluso nullo quem unitatis notâ designamus, esse has quinque: $1, a, aa, a^3, a^4$. Singulis harum applicetur litera b , primò semel, dein bis, tertio ter, ut fiant novæ electiones: b, ab, aab, a^3b, a^4b : nec non, $bb, abb, aabb, a^3bb, a^4bb$: ut & $b^3, ab^3, aab^3, a^3b^3, a^4b^3$, planè ut factum cap. 6. Sed harum electionum illæ, quas b semel ingreditur, per reg. 2, cap. 1 ordine insuper recipiunt permutationes 1, 2, 3, 4, 5; prima vid. unam b , secunda duas ab & ba , tertia tres aab, aba, baa &c. Illæ verò, quas b ingreditur bis, ordine permutationes admittunt 1, 3, 6, 10, 15, juxta numeros scilicet. trigonales; prima nempe unam bb ; secunda tres, abb, bab, bba ; tertia sex, $aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa$. &c. Et illæ, in quibus b ter occurrit, permutationes ordine capiunt 1, 4, 10, 20, 35, juxta numeros pyramidales: quemadmodum etiam illæ, si quæ darentur electiones, in quibus b sæpiùs adhuc recurrit, permutationes admitterent juxta alios & alios figuratos gradatim altiores in infinitum. Hoc peracto, singulis præcedentium electionum permutationibus 1; $a, b; aa, ab, ba, bb; a^3, aab, aba, baa, abb, bab, bba, b^3; &c.$ tertia porrò litera c nunc semel nunc bis adjungi intelligatur; ita novæ prodibunt electiones, $c; ac, bc; aac, abc, bac, bbc; a^3c &c.$

nec non, cc ; acc , bcc ; $aacc$, $abcc$, $bacc$, $bbcc$; a^3cc &c. quarum priores, quæ literam c semel tantum includunt, respectu hujusce literæ, ordine reliquarum non immutato, subeunt permutationes 1, 2, 3, 4, &c. juxta numeros naturales; nempe unio c unam, singuli binionum ac , bc duas; singuli ternionum aac , abc , bac , bbc , tres, & ita porrò: posteriores verò, quæ lit. c bis continent, permutationes ordine patiuntur 1, 3, 6, 10 &c. secundum trigonales; binio nempe cc unam, ternionum acc , bcc singuli tres; quaternionum $aacc$, $abcc$, $bacc$, $bbcc$ singuli sex, & ita consequenter. Dico, ordine reliquarum præter c literarum non immutato; aliàs enim ex. gr. $abcc$ non 6, sed 12 permutationes admittit, at quarum dimidia pars redundat, utpote sequenti quaternioni $bacc$ attribuenda. Quòd si jam quarta adesset litera, ea similiter omnibus præcedentibus permutationibus secundum singulas suas dimensiones foret applicanda, ad formandum novas electiones, quæ denuò permutationes reciperent secundum numeros vel laterales, vel trigonales, vel pyramidales, &c. prout accedens litera vel semel, vel bis, vel ter iis adjuncta esset. Quo pacto nulla optatarum combinationum nos fugiet, neque etiam ulla bis computabitur. Ex dictis verò facilè perspicitur ratio constructionis sequentis Tabellæ, quâ numerum talium combinationum secundum exponentes tam singulos quàm universos expedite definio. Scribo ordine omnes exponentes combinationum, quas propositæ res $a^4 b^3 c^2$ suscipere possunt, à 0 usque ad 9; & sub eorum primis colloco tot unitates, quot prima litera habet dimensiones, & unam amplius, nempe quinque; quibus statim subjungo quinque numeros laterales 1, 2, 3, 4, 5; & his totidem trigonales 1, 3, 6, 10, 15, totidemque pyramidales 1, 4, 10, 20, 35; donec præter seriem unitatum tot habeam series, quot altera litera b habet dimensiones, easq; gradatim dextrorsum promoveo, ut factum cap. 6. Tum addo terminos, qui in eodem sibi gradu perpendiculariter respondent, ut fiant numeri 1, 2, 4, 8, 15 &c. Hos confestim duco in totidem laterales 1, 2, 3, 4 &c. & trigonales 1, 3, 6, 10 &c. singulos ordine multiplicando per singulos, ut præter seriem 1, 2, 4, 8 &c. tot aliæ prodeant numerorum series, 1, 4, 12, 32 &c. & 1, 6, 24, 80 &c. quot tertia litera c obtinet dimensiones, quas rursus gradatim dispono & addo, continuaturus eodem tenore ulterius, si plures literæ su-

per-

pereffent . Sic tandem ex ultimâ additione prodibunt numeri, qui multitudinem combinationum fecundùm exponentes quisque suos indicant, adeoque fimul collecti numerum omnium simpliciter combinationum produunt :

Res Combi- nanda.	Exponentes Combinationum.									
	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
a^4	1	1	1	1	1					
		1	2	3	4	5				
			1	3	6	10	15			
				1	4	10	20	35		
$a^4 b^3$	1	2	4	8	15	25	35	35		
		1	4	12	32	75	150	245	280	
			1	6	24	80	225	525	980	1260
$a^4 b^3 c^2$	1	3	9	26	71	180	410	805	1260	1260

Discimus ex hâc Tabellâ, quòd res propositæ $a^4 b^3 c^2$ contineant unum nullionem, tres uniones, 9 binarios, 26 ternarios, &c. tandemque 1260 novenarios, & quòd summa omnium absolutè combinationum sit 4025. Methodo huic ex abundantia fidem conciliabit sequens laterculus, in quo primò adscriptas vides omnes 60 rerum datarum electiones juxta hypothesin capitis 6^{ti}, & dein ad latus notatos numeros permutationum singulis competentes per regulam 2, capitis primi :

Elect.

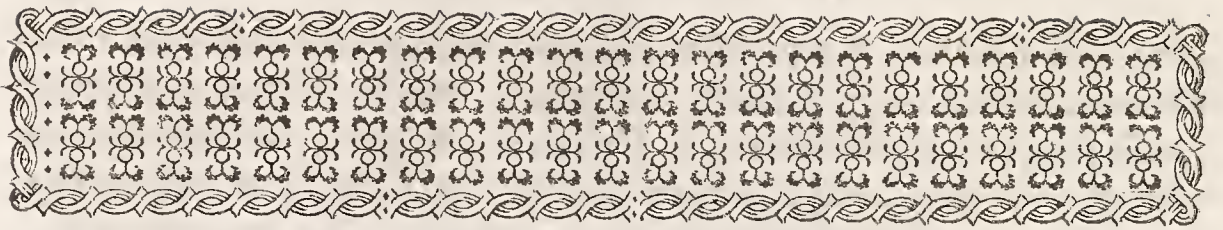
Elect.	Permut.	Elect.	Permut.	Elect.	Permut.
o	1—1	a^4	1	a^4bb	15
a	1	a^3b	4	a^4bc	30
b	1	a^3c	4	a^4cc	15
c	1	aabb	6	a^3b^3	20
aa	1	aabc	12	a^3bbc	60
ab	2	aacc	6	a^3bcc	60
ac	2	ab^3	4	a^2b^3c	60
bb	1	abbc	12	aabbcc	90
bc	2	abcc	12	ab^3cc	60
cc	1	b^3c	4	a^4b^3	35
		bbcc	6	a^4bbc	105
				a^4bcc	105
a^3	1	a^4b	5	a^3b^3c	140
aab	3	a^4c	5	a^3bbcc	210
aac	3	a^3bb	10	aab^3cc	210
abb	3	a^3bc	20	a^4b^3c	280
abc	6	a^3cc	10	a^4bbcc	420
acc	3	aab ³	10	a^3b^3cc	560
b ³	1	aabbc	30	a^4b^3cc	1260 - 1260
bbc	3	aabcc	30		
bcc	3	ab^3c	20		
		abbcc	30		
		b^3cc	10		
				Summa Permut.	4025

Colligitur hinc, quòd ex tribus diversis notis numeralibus (non computato nullione, quo nulla earum accipitur) formari possunt 4024 diversi numeri, in quorum nullo una notarum sæpius quàm quater, altera quàm ter, & tertia quàm bis repetatur. Semper autem omnes notæ, quoties possunt, simul sumtæ, hoc est, combinatæ secundùm exponentium maximum tot numeros suppeditant, quot numeros eadem exhibent combinatæ secundùm exponentem proximè minorem; quod Theorema notatu dignum.

Hæc sunt, quæ de *Arte Combinatoriâ* dicere in præsens suscepimus. Potuissimus quidem postremis hisce capitibus, ubi in combinatio-

binationibus & ordo attenditur, & una eademque res eandem electionem sæpius ingredi posse concipitur, varias iterum quæstiones nobis enodandas proponere, & inquirere, in quot combinationibus una pluresvé res conjunctione vel divisim reperiantur, uti factum cap. 4^{to}; aut, quot combinationes aliqua res semel, bis, ter, quater &c. posita ingrediatur; aut, quot sint illarum combinationum, in quibus nulla rerum datarum plus unâ, duabus, tribus &c. vicibus occurrit; aut in quibus designata quæpiam res primum, secundum, tertium &c. locum occupat, aliisve circumstantiis vestita apparet. Sed quia quæstiones ejusmodi in infinitum multiplicari possunt, malumus eas omnes hîc sicco pede præterire, & si quas earum deinceps ex usu nostro fore videbimus, earundem applicationem & enodationem in reliquis partes reservare, quàm ad particularia nonnulla hîc loci descendendo opus nunquam perficiendum aggredi. Hîc itaque secundæ Parti limites figimus, mox transituri ad cætera instituti nostri capita, usumque prolixum doctrinæ hujus de Combinationibus in Arte Conjectandi per plurima varii generis Problemata liquido ostensuri.





ARTIS CONFECTANDI PARS TERTIA,

explicans

Usum præcedentis Doctrinæ in
variis Sortitionibus & Ludis aleæ.



Abolutâ in præcedente parte Operis, Permutationum & Combinationum Doctrinâ, ordo jubet, ut ejus Usum amplissimum in definiendis Expectationibus Aleatorum per varias Sortitiones & Ludos aleæ hâc parte explicemus. Fundamentum generale hujus indaginis in eo consistit, ut omnes permutationes vel combinationes quarum subjecta materia capax est, pro totidem habeantur casibus æquè possibilibus, & ut diligenter attendatur, quot horum casuum huic illive collusori faveant vel adversentur, è quo dein cætera per doctrinam primæ partis absolvuntur. Cùm verò specialis fundamenti applicatio non levem sæpè industriam requirat, & exemplis meliùs quàm præceptis addiscatur, nolo Lectorem proluxioribus prolegomenis detinere, sed absque morâ ad ipsam enodationem sequentium Problematum

matum transeo, quæ nullo ferè habito selectu, prout in adversariis reperi, proponam, præmissis etiam vel interspersis nonnullis facilioribus, & in quibus nullus combinationum usus apparet.

P R O B L E M A I.

Quidam duobus calculis albo nigroq; in urnâ reconditis præmium proponit tribus A, B, C, eâ lege, ut qui album extraxerit, præmio potiatur; si secus omnes faxint, præmio quoq; careant. Primus autem extrahet ipse A, & reponet; secundus B, tertius C. Quæruntur singulorum sortes?



Iquet, hunc casum tantùm specialem esse Problematis generalioris occasione Propof. XI. part. 1. pag. 34. soluti, quo plurimum Aleatorum sortes exploravimus, qui æquali an inæquali, sortitionum à singulis continuò instituendarum numero aliquid præstare susceperunt; ubi sortem cujuslibet hâc generali formulâ expressimus: $\frac{a^n c^s - c^{n+s}}{a^n + s}$. Itaque cùm in præsentis exemplo lit. *a* (nu-

merus omnium casuum) ob duos tantùm calculos valeat 2; *c* (numerus eorum, quibus præscriptum non impletur) ob unicum nigrum valeat 1; *n* ob unicam sortitionem à singulis instituendam itidem 1; *s* verò (numerus omnium sortitionum hanc præcedentium) pro primo A valeat 0, pro secundo B 1, pro tertio C 2; fiet (substitutis istis literarum valoribus) fors primi A $\frac{1}{2}$, secundi B $\frac{1}{4}$, tertii C $\frac{1}{8}$; sic ut ipsi quoq; aleam proponenti relinquatur $\frac{1}{8}$ sui præmii.

PROBLEMA II.

Cæteris positis, ut prius, si aleæ Brabenta omni jure in præmium se abdicare volens, jubeat reliquos tripartiri præmium inter se, si nullus eorum album calculum elegerit: Queruntur tum eorum sortes?

Quia sic omne jus præmii in solidum transit in tres reliquos; perspicuum est, uniuscujusque expectationem meliorari $\frac{1}{24}$, hoc est, triente ejus. quod juxta præced. hypoth. soli Brabeutæ convenisset. Quocirca addito $\frac{1}{24}$ seorsim ad $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{8}$, habetur expectatio primi $\frac{13}{24}$, secundi $\frac{7}{24}$, & tertii $\frac{4}{24}$.

PROBLEMA III.

Sex, A, B, C, D, E, F, jussu Principis, qui postremis magis favet quàm primis, aleâ periclitantur: primi duo A & B seorsim sortiri incipient; uter eorum vicerit, sortietur cum tertio C, uter horum superior evaserit, certabit cum D; & sic porro usq; ad ultimum F; præmiumq; reportabit, qui post ultimum congressum victor supererit. Supponitur autem, binos quoscunq; equâ sorte inter se certare, hoc est, neutrum altero potiolem ad vincendum expectationem habere. Queruntur ipsorum sortes?

Primus

Primus A præmio potiri nequit, nisi omnium reliquorum quinque victor evadat, hoc est, nisi quinquies continuò vincat; uti & secundus B: sed nec tertius C palmam reportabit, nisi alterutrum præcedentium A & B, & omnes tres sequentes superet, hoc est, nisi quater continuò vincat, nec 4^{tu}s D, nisi cum uno trium præcedentium ambos sequentes, hoc est, nisi ter continuò vincat, & similiter de reliquis. Unde constat, Problema hoc pro casu speciali habendum esse ejus, quo quærentur expectationes collusorum, qui aliquot fortitionibus quidpiam aliquoties præstare suscipiunt; cujus solutionem ad Propof. XII part. 1. pag. 38. tradidi, Tabellâ in eum usum supputatâ, juxta quam primi vel secundi fors erit $\frac{b^5}{a^5}$, tertii $\frac{b^4}{a^4}$, quarti $\frac{b^3}{a^3}$, quinti $\frac{bb}{aa}$, & sexti $\frac{b}{a}$, hoc est, (quia a ad b habet rationem duplam ob æqualem in quâvis fortitione numerum casuum ad vincendum & perdendum) fors primi vel secundi $\frac{1}{32}$, tertii $\frac{1}{16}$, quarti $\frac{1}{8}$, quinti $\frac{1}{4}$, & sexti $\frac{1}{2}$. Unde patet, exceptis duobus primis, qui æquali expectatione gaudent, quemlibet reliquorum proximè præcedenti duplo potiore sortem nancisci; omnium verò expectationes exhaurire integrum præmium.

P R O B L E M A I V .

Ceteris positis, ut priùs, si fingamus non æquam obtinere sortem in quâvis aleâ, sed unumquemq; cum secundo à se congregientem duplò, cum tertio 4^{plò}, cum quarto 8^{plò} &c. plures ad vincendum quàm perdendum casus habere, exceptis tantùm duobus primis, quos æquo Marte certare ponimus: queritur, an sic omnes sex æquale jus acquirant in

S 3

præ-

præmium propositum, compensatis per duplam proportionem casuum subduplis expectationibus præcedentis propositionis?

Hic ob diversitatem fortium, quæ in diversis aleis regnat, calculus paulò intricatior: Consulatur Regula ad calcem Propos. XII part. I. pag. 44. & formula, quam suggerit, $\frac{beh \&c.}{adg \&c.}$ ubi literæ *b e h* &c. numeros casuum ad vincendum, & *a d g* &c. numeros omnium casuum in successivis aleis significant; exprimitur enim hâc formulâ expectatio aleatoris alicujus: qui aliquoties continuè vincere tenetur, quantumvis in diversis aleis non idem maneat casuum numerus, quibus vincat; uti in præced. Problemate. Patet autem, quantitatem hanc $\frac{beh \&c.}{adg \&c.} \propto \frac{b}{a} \cdot \frac{e}{d} \cdot \frac{h}{g} \&c.$ hoc est, expectationem totalem, seu spem vincendi omnes aleas, multiplicatione conflata esse ex fortibus particularibus, quas habet ad vincendum singulas. Conf. Coroll. I. Prop. 3 part. I. Quapropter ut Problematis nostri solutio methodica habeatur, investigandum successivè, quænam juxta hanc formulam primi A sit futura fors, si primò unum B, dein si duos B & C, hinc si tres, quatuor, ac denique omnes quinque reliquos vincere suscipiat; id enim omne prærequiritur ad indagandum sortes cæterorum. Est verò fors ipsius, cum solum B vincere suscipit, $\frac{1}{2}$; cum duos B & C vincere contendit, $\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} \propto \frac{1}{3}$; cum tres B, C & D, $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5} \propto \frac{4}{15}$, &c. ut ex apposito laterculo apparet. Quod idem intelligendum de secundo B. Quod spectat tertium C, is cum alterutro præcedentium (quem in laterculis lit. P indigitamus) congregi tenebitur; utrumvis autem contingat, habet $\frac{1}{3}$ expectationis ad illum vincendum: quare si præter illum etiam sequentem D vincere suscipiat, habebit $\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} \propto \frac{2}{9}$; si verò & ipsum E, $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} \propto \frac{8}{45}$. Similiter quarto D cum uno præcedentium P congregiendum erit: si cum C congregiatur, habet $\frac{1}{3}$ ad illum vincendum: si cum A vel B, habet $\frac{1}{5}$; sed æquè facile contingit, ut cum A vel B vel C congregi teneatur, quandoquidem omnes tres eandem habent expectationem ad

Sors ipsius . . . A		B	
ad vincendum	$B \propto \frac{1}{2}$	A	$\propto \frac{1}{2}$
	$B, C \propto \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} \propto \frac{1}{3}$	A, C	$\propto \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} \propto \frac{1}{3}$
	$B, C, D \propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5} \propto \frac{4}{15}$	A, C, D	$\propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 5} \propto \frac{4}{15}$
	$B, C, D, E \propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9} \propto \frac{32}{135}$	A, C, D, E	$\propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9} \propto \frac{32}{135}$
	$B, C, D, E, F \propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 17} \propto \frac{512}{2295}$	A, C, D, E, F	$\propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 17} \propto \frac{512}{2295}$
Sors ipsius . . . C		D	
ad vincendum	$P \propto \frac{1}{3}$	P	$\propto \frac{11}{45}$
	$P, D \propto \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} \propto \frac{2}{9}$	P, E	$\propto \frac{11 \cdot 2}{45 \cdot 3} \propto \frac{22}{135}$
	$P, D, E \propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 5} \propto \frac{8}{45}$	P, E, F	$\propto \frac{11 \cdot 2 \cdot 4}{45 \cdot 3 \cdot 5} \propto \frac{88}{675}$
	$P, D, E, F \propto \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9} \propto \frac{64}{405}$		
Sors ipsius . . . E		F	
ad vincendum	$P \propto \frac{5}{27}$	P	$\propto \frac{181}{1275}$
	$P, F \propto \frac{5 \cdot 2}{27 \cdot 3} \propto \frac{10}{81}$		

vincendum continuè, quousque ordo certandi quartum D tangit ;
singuli nempe $\frac{1}{3}$, ut ex Tabulâ liquet : quocirca ipse D per Prop. 3.

part. 1. habet $\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 5}{45} \propto \frac{11}{45}$ ad vincendum indefinitè unum

trium præcedentium, quem ipsi fors objecerit ; ideoque si præterea
& quintum E vincere conetur, habere censebitur $\frac{11 \cdot 2}{45 \cdot 3} \propto \frac{22}{135}$ &c. Non

secus quinti E & sexti F fortes explorantur, nisi quòd ipsos non æquè
facilè cum unoquovis ex præcedentibus congregari contingit. Nam
ex. gr. primus A habet $\frac{4}{15}$ ad vincendum continuè ipsos B, C, D,

juxta

juxta laterculum, tantundemque secundus B ad vincendum A, C, D, & tertius C habet $\frac{2}{9}$ ad vincendum P & D, & quartus D $\frac{11}{45}$ ad vincendum P, hoc est, reductis ad commune nomen fractionibus, A & B habent $\frac{12}{45}$, C $\frac{10}{45}$, & D $\frac{11}{45}$ ad vincendum continuè, quousque ordo certandi quintum E postulat: quapropter 12 sunt casus, quibus ipse E cum primo A, totidem quibus cum secundo B, 10 quibus cum tertio C, & 11 quibus cum 4^{to} D committitur; unde per Prop. 3 part. 1 habet $24 \cdot \frac{1:9}{45} + 10 \cdot \frac{1:5}{45} + 11 \cdot \frac{1:3}{45} \infty \frac{5}{27}$ expectationis ad

vincendum indefinitè adversarium, quem ipsi fors ex præcedentibus obtulerit. Et sic in cæteris: Quòd si ubique ritè operatus fueris, deprehendes, expectationes totales aleatorum seu spes adimplendi omnes condiciones certaminis & reportandi præmium exprimi postremis laterculorum fractionibus $\frac{512}{2295}$, $\frac{512}{2295}$, $\frac{64}{405}$, $\frac{88}{675}$, $\frac{10}{81}$, $\frac{181}{1275}$, quæ ad idem nomen 34425 reductæ monstrant, illas valde diversas esse & se habere ut 7680, 7680, 5440, 4488, 4250, 4887; & quia præcisè unum integrum exhauriunt, eo ipso probitatem methodi & calculi confirmant.

PROBLEMA V.

A certat cum B, quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusq; speciei, 4 chartas extracturus sit, ita ut ex unaquaq; specie habeat unam. Queritur ratio sortium?

Problematis hujus in Appendice Problematum Hugénianorum ordine tertii solutionem jam parte primâ exhibuimus: nunc ostendemus, quo pacto idem aliter, in auxilium vocatâ Combinationum doctrinâ confici possit.

Hunc in finem quæratúr, quoties ex 40 chartis lusoriis quaternæ possint accipi, hoc est, quæratúr numerus quaternionum in rebus 40. Inveniuntur autem per Cap. IV. part. 2. quaterniones isti

isti $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty 91390$, habendi pro totidem aleæ casibus, qui omnes æquè facile evenire possunt. At horum casuum sunt 10000, qui Problematis conditionem implent, faciuntque ut ex unaquaque chartarum specie habeatur una, quod sic ostendi potest:

Pono pro 4 speciebus chartarum 4 tesseras, & pro 10 chartis cujusque speciei decem facies seu hedras in quaque tessera: sic totidem erunt diversi jactus in his tesseras, quot chartarum sunt quaterniones præscriptam conditionem adimplentes; sicut enim ad hanc implendam ex quavis specie necessariò una requiritur charta & non nisi una, ita in quovis tesserarum jactu singulæ tesserae necessariò unam & non nisi unam faciem supernè ostentant. Sed ex iis quæ Hugenius ad Prop. X. part. 1. præfatur, colligi potest, quòd in 4 ejusmodi tesseras reperientur jactus 10. 10. 10. 10. ∞ 10000; cum ergò totidem sint chartarum electiones ipsi A faventes, cæteræque 81390 contra certanti prosint, sequitur sortem A ad sortem B esse ut 10000 ad 81390, seu ut 1000 ad 8139.

PROBLEMA VI.

Assumtis 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus sit, inter quos tres albi erunt. Queritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B?

Problema hoc, quod in Appendice Problematum Hugenianorum est ordine quartum, in hanc Partem rejicere coacti fuimus, propterea quòd ejus solutio aliter quàm combinationum ope, quarum Doctrina secundâ demum Parte tradenda erat, difficulter investigari potuisset.

Constat primò, tot esse in universum aleæ propositæ casus, quoties ex 12 calculis septeni possunt eligi, nempe

T

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$\infty 7920$

∞ 792, per Cap. IV. part. 2. Deinde considerandum est, si quis quærat, quot horum casuum ipsi A faveant vel adversentur, hoc tantundem esse, ac si quærat, in quot septenariis ex designatis quatuor calculis tres qualescunque excluso quarto reperiantur; cujus Problematis solutionem sub finem dicti capituli ante appendicem hanc generali formâ expressimus $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \dots m - b + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots b}$ in

$$\frac{n - m \cdot n - m - 1 \cdot n - m - 2 \dots n - m - c + b + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots c - b}, \text{ significante literâ } n$$

numerum rerum combinandarum, c exponentem combinationis, m numerum rerum designatarum, b illarum ex designatis quæ combinationes optatas junctim ingredi debent: quare si interpreteris n

per 12, c per 7, m per 4, & b per 3, habebis $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ in $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ ∞

4.70 ∞ 280, numerum omnium septenariorum, quos singulos tres albi calculi excluso quarto ingrediuntur. Tot ergò casibus vincet A, reliquis 512 ipsi B profuturis, adeò ut fors illius sit ad sortem hujus, ut 280 ad 512, sive ut 35 ad 64; intellige si præcisè tres albos calculos nec plures nec pauciores eximere susceperit. Nam si tres albi eximendi de tribus *ad minimum* intelligantur, ita ut sensus Problematis sit, etiam tum lucraturum ipsum A, si plures tribus, h. e. omnes 4 albos elegerit, tum perspicuum est, numerum casuum quibus vincit A augendum esse toto illo electionum numero, quas omnes 4 albi calculi ingrediuntur; qui numerus per eandem regulam, positis tantum m & b æqualibus seu verso valore ipsius b in 4, invenitur $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ∞ 56, cui additus præcedens 280 efficit 336, numerum electionum ipsi A faventium; & relinquuntur ipsi B duntaxat 456, sic ut eo casu sortes ipsorum sint ut 336 & 456, seu ut 14 & 19.

PROBLEMA VII.

Collusores aliquot A, B, C, &c. ex manipulo chartarum lusoriarum, quarum una ico-

ne signata est, reliquæ iconismis vacuæ (cartes blanches) folia ordine \mathcal{E} alternatim eximunt, eâ conditione, ut qui signatum exemerit vincat. Tollet autem *A* primum, *B* secundum, *C* tertium, \mathcal{E} sic usq; ad ultimum, post quem primus *A* tollere perget sequens folium, atq; ita porrò usque ad finem ludi. Quæritur ratio sortium?

Patet, tot esse casus æquè faciles quot folia; cum folium iconismo signatum æquè facile vel primum, vel secundum vel tertium, vel deniq; ultimum locum obtinere possit: unde tot casus quisque habet ad vincendum quot ipsi folia contingunt; ac per consequens

Si omnibus collusoribus æqualis foliorum numerus contingit, quod fit cùm numerus collusorum est pars aliquota numeri chartarum, seu hic per illum exactè dividi potest, æqualis quoque omnium fors erit: Ita si numerus collusorum sit a , chartarum ma , unicuique obtingent m chartæ, quæ sortem illi pariunt $\frac{m}{ma} \propto \frac{1}{a}$, sic ut tum ordo eligendi nulli collusorum præjudicet.

Si verò non omnibus æqualis foliorum numerus obtingit, quod accidit ubi numerus chartarum per numerum collusorum exactè dividi nequit, putà si numero collusorum existente a , chartarum numerus est $ma \propto b$ (posito $b < a$) neque etiam sortes omnium æquales erunt. Tum enim unicuique primorum b collusorum cedent chartæ $m + 1$, unicuique autem reliquorum tantùm m : ac proinde fors unius ex illis erit ad sortem unius ex his, ut $m + 1$ ad m : Ex. gr. posito collusorum numero 10 & chartarum 64. seu 6 in $10 + 4$; fors unius ex primis quatuor est ad sortem unius ex postremis sex, ut 7 ad 6.

PROBLEMA VIII.

Cæteris positis, ut prius, si in manipulo chartarum plures iconismis signatae existant, illeque vincere censendus sit, qui primam earum traxerit. Quæritur tum ratio sortium?

Hic fortes collusorum non amplius æquales sunt, sed quivis præcedentium unoquoque sequentium potiore conditionem nanciscitur, sive eorum numerus numeri chartarum pars aliquota sit seu se-cus, ob rationem, quòd signatarum prima, à quâ solâ victoria dependet, faciliùs primum locum quàm secundum, & hunc faciliùs quàm tertium &c. occupare potest. Etenim quòd anteriorem ista locum occupat, eò plura cæteris signatis post se loca occupanda relinquit. Ut verò determinemus numerum casuum, quibus unumquodq; fiat, sumamus ex. gr. chartas 12, interque illas 4 iconibus conspicuas, nam eadem operandi methodus ubique. Tum si prima charta icone signata primum locum occupet, reliquis tribus undecim patent loca reliqua; unde terna horum qualiacunque occupando tot casus diversos efficiunt, quot continentur ternarii in rebus undecim, nempe $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty 165$. Pariter si prima signata charta secundum locum teneat, reliquæ tres ex decem locis reliquis tria qualiacunque occupabunt; quod tot diversos casus præbet, quot ternarii comprehenduntur in rebus decem, vid. $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty 120$. Rursus, signatarum primâ tertium locum occupante, reliquis tantùm patent loca novem, unde tot casus emergunt, quot ternarii continentur in rebus 9: & sic ulterius juxta subjunctum laterculum, in quo prima series ordinem collusorum si vis, trium A, B, C alternatim trahentium; secunda series loca foliorum; tertia numeros casuum. quibus primum folium signatum in loca respondentia incidere potest, exhibet, Hos casus deter-

determinant ipsissimi ternarii, quos ordine recipiunt res 11, 10, 9, &c. eosdem determinarent earundem binarii, si 3 tantum folia signata ponerentur; & unitates, si duo.

Ordo Collus..	A. B. C. A. B. C. A. B. C. A. B. C.
Loca foliorum	1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.
Num. casuum	165. 120. 84. 56. 35. 20. 10. 4. 1. 0. 0. 0.

Omnes verò hi casus æquè facile evenire possunt, & summa eorum æqualis numero quaternionum in rebus 12 $\infty \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty$ 495: quanquam enim singuli horum casuum ingentem numerum aliorum casuum secundariorum sub se comprehendunt: (eorum scilicet qui ex solâ transpositione 4 foliorum signatorum inter se, & 8 non-signatorum inter se resultant) attamen hi casus secundarii magno compendio insuper haberi possunt, quòd tum ipsi æquè sunt proclives, tum idem ipsorum numerus (ob constantem foliorum 4 signatorum & 8 non-signatorum numerum) uni primario respondet: cuique videlicet primario 1. 2. 3. 4 in 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 ∞ 24 in 40320 ∞ 967680 secundarii, per Cap. I. part. 2. Et verò æqualis numerus casuum secundariorum æquè proclivium casum æquè proclivem primarium efficit, per Cor. 2. Prop. 3. part. 1.

Quibus ita ostensis, si sortes collusorum desideres, necesse tantum habes addere in unam summam numeros casuum, locis illis respondententes, in quæ quisque collusor incidit. Atque sic reperitur numerus casuum ipsi A faventium 165 + 56 + 10 ∞ 231, ipsi B 120 + 35 + 4 ∞ 159, ipsi C 84 + 20 + 1 ∞ 105; unde ratio sortium fit. ut 231, 159, 105, sive ut 77, 53, 35. Notandum hoc Problema reapse idem esse cum secundo Appendicis Huguenianæ part. 1. nomine tantum calculorum in folia lusoria mutato: cuius proinde solutio quo pacto aliter quàm ibi haberi, & ex combinationum consideratione elici possit, nunc ostendimus. Paulò intricatius est hoc, quod sequitur.

97

PROBLEMA IX.

Ceteris positis, ut antea, si Collusores ita pacifcantur inter se, ut vincat ille qui plures imagines traxerit; si verò duo pluresve æqualem acceperint imaginum numerum, æqualiter quoque depositum inter se partiantur, reliquis, quibus minor earum contigit numerus, nihil habentibus. Quæritur tum ratio sortium?

Si numerus collusorum est pars aliquota numeri chartarum, non opus est speciali determinatione casuum: sed absq; omni calculo constare potest, quantuscunque sit uterque & qualiscunque etiam imaginum numerus existat, sortes omnium collusorum inter se æquales esse debere; cùm enim iis omnibus æquè multa folia in partem cadant, & signatorum quodlibet ad quemlibet locum indifferenter se habeat, nulla ratio est, cur in æquali foliorum numero hic potius quàm ille majorem minoremve signatorum numerum expectet.

At si numerus chartarum numeri collusorum non sit exactè multiplex, aut etiam aliàs non æquè multa folia omnibus extrahenda concedantur, (quæ sive alternatim sive continuò extra hanc, perinde, cum circumstantia ordinis in extrahendo hic nihil mutet) tum sortes eorum itidem sunt inæquales, eoq; difficiliùs reperiuntur, quo major tum collusorum tum signatorum foliorum numerus existit. Observo tamen, quòd si duo tantùm signata adsint, collusores verò quotcunque, sortes istæ semper sunt futuræ ut ipsi numeri foliorum, quæ quisq; extrahet; prorsus ut supra Probl. VII. in hypothesis unius folii sign. Ponatur enim numerus chartarum a , è quibus uni collusorum cedant b , alii c , tertio d chartæ, & consideretur, quòd in chartis b , quas primus

primus obtinet, signatarum vel altera, vel utraque, vel neutra reperiri possit. Si altera tantum adsit, illa vel primum vel secundum vel tertium &c. locum in istis b chartis occupabit, interea dum altera quoque promiscue unumquemvis reliquorum $a - b$ locorum occupare potest; quod proin $b \cdot a - b \infty ab - bb$ diversos casus supeditat. Sin ambæ signatæ chartas primi ingrediantur, eæ vel primum & secundum, primum & tertium &c. item 2^{dum} & 3^{tium} &c. locum obtinebunt; unde tot casuum varietates emergunt, quot biniones in rebus b habentur, nempe $\frac{b \cdot b - 1}{1 \cdot 2} \infty \frac{bb - b}{2}$: quemadmodum etiam ob eandem rationem universus numerus casuum æquatur numero binionum contentorum in universis a chartis, videl. $\frac{a \cdot a - 1}{1 \cdot 2} \infty \frac{aa - a}{2}$: intellige, neglectis iis casibus secundariis, qui ex solâ utriusque signatæ inter se, & non-signatarum inter se permutatione oriuntur, utpote quorum numerus ob constantem signatarum & non-signatarum numerum perpetuò constans manet: quod mox infra quoque, ut & in sequenti Problemate & similibus exemplis semper subintelligendum est, etiamsi expressè non dicatur. Jam verò dictus collusor, cum unam signatam obtinuerit, semisem depositi ex pacto consequetur; & cum utramque, totum depositum: quapropter habet $ab - bb$ casus ad $\frac{x}{2}$, $\frac{bb - b}{2}$ casus ad 1, & cæteros, qui complent numerum $\frac{aa - a}{2}$, ad 0; id quod ei per Prop. 3. part. 1. sortem parit $\frac{b}{a}$. Eodem modo fors ejus, cui cedunt chartæ c , invenitur $\frac{c}{a}$; & ejus, cui d chartæ, $\frac{d}{a}$, &c. adeoque ratio fortium, ut b, c, d , numeri scil. chartarum, quas singuli accipiunt; quod ostendendum erat.

Extra verò hunc casum calculus paulò morosior evadit, & sæpè tædii plenissimus, præsertim in hypothese signatarum chartarum & collusorum paulò plurium, ubi multiplex complexionum varietas difficulter sub regulâ generali cogi potest. Interim modus operandi semper idem, & in eo consistit, ut primò exploretur, quam variè folia signata inter collusores distribui possint, hoc est, quot modis possibilibus numerus eorum dispesci queat in tot partes, quot sunt

sunt collusores, quarumque partium nulla numerum foliorum respectivo collusori cedentium superet (quod eo ferè modo efficitur, quo supra part. 1. pag. 20. ad jactus punctorum in tessellis investigandos usi fuimus, nisi quòd hìc ipsam quoque cyphram partibus accenseamus; cum utique fieri possit, ut unus alterve collusorum nullum ex foliis signatis consequatur): deinde ut supputetur, quot casus singulis istis variationibus respondeant; quorum numerus initur sumendo productum continuum combinationum ex rebus tot, quot quisque chartas accipit, secundum numerum signatarum iis permistarum ceu exponentem; veluti si ex chartis 40, quarum 10 sunt signatae, unus collusorum eximere d. beat 16, alius 10, tertius 8, & quartus 6; quæratque quot casibus contingere possit, ut simul inter chartas primi reperiantur signatae 4, secundi 3, tertii 3, & quarti 0; multiplico numerum quaternionum in rebus 16, ternionum in 10, ternionum in 8, & nullionum in 6, in se invicem, & productum $\frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ in $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ in $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ in 100 1820. 120. 56. 100 12230400 quæsito satisfacièt; uti ex supra ostensis colligere facile est.

Quoniam autem in integri Problematis enodatione calculo nunquam contractiore uti licet, non abs re erit. rem totam speciali aliquo exemplo declarare: Sunt chartae 20 (quarum 10 signatae) alternatim distribuendae inter collusores tres A, B, C, sic ut primus consequatur chartas 7, alter 7, & tertius tantum 6; quæranturque eorum expectationes. Liquet primò, fieri posse, ut in 7 chartis primi collusoris vel nulla, vel una, vel duae, 3, 4, 5, 6, vel denique 7 signatae reperiantur; & si tantum una vel 2 vel 3 signatae adsint, eum infallibiliter perditurum; quandoquidem reliquorum alteruter necessarìò plures tribus acquirat, & sic ex pacto vincet: quare numerum horum casuum inire supersedeo, & statim suppono, ipsi A 4 signatas obtingere; quo pacto uni reliquorum cedere possunt vel sex signatae reliquae, vel 5, vel pauciores: sed quoniam quatenus ei 5 vel 6 cedunt, eatenus perdere facient collusorem A; idcirco & hos casus ceu inutiles prætereo, & mox transeo ad signatas 4 & 3,tribuendo ipsi B 4 & C 2, vel B 2 & C 4, vel denique utrique 3. (quarum hypothesisum duae priores collusorem A ex semisse, tertia ex asse depositi

fiti possessorem reddunt) atque per doctrinam præced. reperio, casus esse 18375 qui collusoribus A, B, C, signatas 4, 4, 2: casus 11025, qui iis 4, 2, 4 & casus 24500, qui 4, 3, 3, signatas advehunt. Deinde fingo collusori A obtingere signatas 5, sic reliquas 5 vel solus B vel solus C habebit; vel partem earum hic, partem ille accipiet: atq; idcirco 21 numerum quinionum in rebus 7, duco tum in 21 numerum totidem quinionum in aliis rebus 7, tum in 6 numerum quinionum in rebus 6, ad habendum casus $441 + 126 \infty 567$, qui singuli collusori A 5 signatas & alterutri reliquorum 5 reliquas afferunt, adeoque ipsi A semissem depositi lucrantur. Haud secus etiam supputantur casus, quibus fieri potest, ut dum A 5 signatas obtinet, reliquorum uni obtingant 4 & alteri 1, vel uni 3 & alteri 2; sed non opus est isthuc descendere; possum enim collusores B & C sumere pro uno eodemque, & quæsitum absque distinctione casuum brevius obtinere, si à 1287 numero quinionum in chartis 13, quas simul ambo reliqui consequuntur, subducantur præcedentes $21 + 6 \infty 27$ casus, quibus omnes 5 signatæ eorum alterutri obtingunt; ac residuum 1260 ducatur in 21 numerum quinionum in 7 chartis primi: sic enim prodeunt casus 26460; qui singuli collusori A integrum depositum acquirunt. Tandem etiam pono collusori A evenire signatas 6 vel 7, & quia nunc ultra signatarum semissem habet, video illum necessario victorem evasurum, quomocunque cæteræ 4 aut 3 signatæ inter collusores B & C distribuantur; quare neglecta & hic specialiore partitione, ipsisque B & C pro uno eodemque collusore habitis, sumo ex 13 eorum foliis omnes promiscuè quaterniones & terniones, eorumque numerum per numerum senariorum & septenariorum in 7 chartis primi comprehensorum sigillatim multiplico, ut fiant $5005 + 286 \infty 5291$ novi casus, qui collusorem A totius depositi dominum faciunt, prout ex apposito laterculo apparet:

Charta univ ^{er} sa	A	B	C	Casus	ad
	7	7	6		
signata	4	4	2	18375	$\frac{1}{2}$
	4	2	4	11025	$\frac{1}{2}$
	4	3	3	24500	1
	5	5	—	441	$\frac{1}{2}$
	5	—	5	126	$\frac{1}{2}$
	5	5		26460	1
	6	4		5005	1
	7	3		286	1

His peractis numeros casuum, quibus collusor A integro deposito potitur, in unam summam conjicio; nec non illos, quibus dimidium depositi acquirit, in aliam summam addo; tandemque etiam numerum omnium absolutè casuum, quos 10 signatæ in chartis 20 formare possunt, inquiri, qui est 184756: & sic

reperio, illum habere 56251 casus ad 1, 29967 ad $\frac{1}{2}$, & reliquos ad 0; quod expectationem ipsi parit $\frac{142469}{369512}$; Et quia secundus B ex manipulo chartarum totidem, quot primus A nanciscitur, habebit & ipse $\frac{142469}{369512}$; unde tertio C relinquatur $\frac{84574}{369512}$, quæ portio etiam ab initio eodem modo computari potuisset. Erit igitur fors alterutrius ex duobus primis ad sortem tertii, ut 142469 ad 84574, major multò quàm 7 ad 6, qui sunt numeri foliorum quæ singulis ex manipulo debentur.

PROBLEMA X.

Quatuor Collusores A, B, C, D, eodem pacto quo in preced. inter se inito, ludunt 36 foliis, quorum 16 iconis signata sunt, atque singulis singula folia ordine atque alternatim distribuunt. Accidit autem, ut distributis jam 23 foliis, ipsi A in sortem cesserint 4 imagines, ipsi B 3, C 2 & D 1, sic ut residua sint 13 folia, interque illa 6 signata. Quartus D (quem nunc ordo tangeret proximum accipiendi

piendi folium) videns sibi omnem ferè vincendi spem evanuisse, alteri cuidam jus suum vendere vult. Quæritur, quanti? & quæ singulorum expectationes?

Problema non differt à præcedenti, nisi quòd collusores jam aliquotusque lusum profecuti supponuntur. Quoniam residua ponimus 13 chartarum folia, quorum primum ipsi D destinatum, sequens ipsi A, tertium ipsi B, atque ita ordine ad ultimum usque, quod rursus ipsi D continget, sequitur, ipsum D 4 folia ex illis 13 accepturum, singulos verò reliquorum tria; adeoque D non plura signata quàm 4, nec singulos reliquorum plura quàm 3 (ultra illa quæ jam habere supponuntur) consequi posse. Quo observato dispiendum, quot diversis modis residua 6 folia signata inter collusores distribui possint, sic ut ipsi D nunquam plura quàm 4, nec singulis reliquorum plura quàm tria obtingant: ac deinde supputandum, quot rursus casibus singulæ hæ mutationes sint obnoxie; prout hæc omnia in col. 1 subjunctæ tabellæ exhibentur. Fit autem operatio prorsus ut in præced. Probl. ut non opus sit ejus explicationi fusiùs inhærere. Solum hæc attendendum, quòd supputatis casibus, priusquam constare possit, quinam huic illive collusori faveant, numeri signatarum chartarum augendi sint illis signatis, quas singuli collusores (antequam D sortem suam vendidisset) habuerant; (quandoquidem ab utrisque conjunctim victoria dependet;) numerus scil. signatarum ipsius D augendus unitate, ipsius A quaternario, B ternario, & C binario; uti videre est in col. 2 tabellæ loco prioris surrogandâ. Tum verò colligendi sunt in unam summam omnes casus, quibus singuli collusores vel totum depositum, vel dimidiam, aut 3 aut 4^{tam} partem depositi auferunt, vel quibus omninò nihil impetrant: quo pacto invenietur A habere 1035 casus ad obtinendum 1, 399 casus ad $\frac{1}{2}$ &c. (ut seorsim in adjuncto tabellæ laterculo notatum cernis,) qui omnes collecti faciunt 1716, (quantus quoque præcisè est senariorum numerus in chartis 13.) Quocirca fiet fors ipsius A ∞

$$1035 \cdot 1 + 399 \cdot 1:2 + 9 \cdot 1:3 + 36 \cdot 1:4 + 138 \cdot \circ$$

1716

$\infty \frac{2493}{3432}$: & similiter ipsius
 B $\infty \frac{742}{3432}$; ipsius C $\infty \frac{134}{3432}$; ac tandem ipsius D $\infty \frac{63}{3432}$; sic
 ut ratio fortium sit, ut 2493, 742, 134, 63.

Notandum, quòd si chartæ residuæ non fuissent tam paucae, neque numeri casuum inventu adeò faciles, operæ pretium fuisset, eodem quo in præced. Probl. compendio uti; præsertim si unius tantum collusoris D quærenda expectatio fuisset: tum enim licuisset præterire omnes partitionum modos, qui ipsi non plures quam duas, h. e. (cum eâ quam jam habere supponitur) quam tres signatas attribuunt; & ex reliquis duntaxat illos paucos considerare, qui nulli cæterorum collusorum plures quam huic signatas addicunt, quique in tabula lit. N notati conspiciuntur; cum in cæteris signatarum partitionibus omnibus eum vi pacti toto deposito privari sit conspicuum. Nota denique idem fore genus Problematis, si loco chartarum lusoriarum alternatim accipiendarum calculi sive schedulæ aliæve res similes, quarum aliquæ sint signatæ, in loculo vel urna recondantur, atque ex iis collusores aliquot alii pauciores alii plures, sive simul & semel seu successivè, eximant, eâ conditione, ut illè vincere censendus sit, qui plures signatas exemerit. Supputandi enim ratio ubique eadem, neque (quod iteratò hîc moneo) circumstantia hæc de eximendis continuò vel alternatim calculis quicquam ad rem facit.

Colum. 1.		Colum. 2.		Colum. 1.		Colum. 2.				
D.	A. B. C.	Casus	D. A. B. C	D.	A. B. C	Casus	D. A. B. C			
—	3. 3. —	1	1. 7. 6. 2	3.	3. —. —	4	4. 7. 3. 2			
—	3. —. 3	1	1. 7. 3. 5	3.	—. 3. —	4	4. 4. 6. 2			
—	—. 3. 3	1	1. 4. 6. 5	3.	—. —. 3	4	4. 4. 3. 5			
—	3. 2. 1	9	1. 7. 5. 3	3.	2. 1. —	36	4. 6. 4. 2			
—	3. 1. 2	9	1. 7. 4. 4	3.	2. —. 1	36	4. 6. 3. 3			
—	2. 3. 1	9	1. 6. 6. 3	3.	1. 2. —	36	4. 5. 5. 2			
—	1. 3. 2	9	1. 5. 6. 4	3.	—. 2. 1	36	4. 4. 5. 3			
—	2. 1. 3	9	1. 6. 4. 5	3.	1. —. 2	36	4. 5. 3. 4			
—	1. 2. 3	9	1. 5. 5. 5	3.	—. 1. 2	36	4. 4. 4. 4			
—	2. 2. 2	27	1. 6. 5. 4	3.	1. 1. 1	108	4. 5. 4. 3			
1.	3. 2. —	12	2. 7. 5. 2	4.	2. —. —	3	5. 6. 3. 2			
1.	3. —. 2	12	2. 7. 3. 4	4.	—. 2. —	3	5. 4. 5. 2			
1.	2. 3. —	12	2. 6. 6. 2	4.	—. —. 2	3	5. 4. 3. 4			
1.	—. 3. 2	12	2. 4. 6. 4	4.	1. 1. —	9	5. 5. 4. 2			
1.	2. —. 3	12	2. 6. 3. 5	4.	1. —. 1	9	5. 5. 3. 3			
1.	—. 2. 3	12	2. 4. 5. 5	4.	—. 1. 1	9	5. 4. 4. 3			
1.	3. 1. 1	36	2. 7. 4. 3	Summa, 1716 Casus.						
1.	1. 3. 1	36	2. 5. 6. 3							
1.	1. 1. 3	36	2. 5. 4. 5							
1.	2. 2. 1	108	2. 6. 5. 3							
1.	2. 1. 2	108	2. 6. 4. 4							
1.	1. 2. 2	108	2. 5. 5. 4							
2.	3. 1. —	18	3. 7. 4. 2	Casus, quibus obtinent Collufores						
2.	3. —. 1	18	3. 7. 3. 3							
2.	1. 3. —	18	3. 5. 6. 2							
2.	—. 3. 1	18	3. 4. 6. 3							
2.	1. —. 3	18	3. 5. 3. 5							
2.	—. 1. 3	18	3. 4. 4. 5							
2.	2. 2. —	54	3. 6. 5. 2							
2.	2. —. 2	54	3. 6. 3. 4							
2.	—. 2. 2	54	3. 4. 5. 4							
2.	2. 1. 1	62	3. 6. 4. 3							
2.	1. 2. 1	62	3. 5. 5. 3							
2.	1. 1. 2	162	3. 5. 4. 4							
3.	7. 4. 2	1	1035					188	22	12
3.	7. 3. 3	$\frac{1}{2}$	399					342	66	21
3.	5. 6. 2	$\frac{1}{3}$	9					9	9	—
3.	4. 6. 3	$\frac{1}{4}$	36	36	36	36				
3.	5. 3. 5	0	237	1141	1583	1647				
3.	4. 4. 5	Summa	1716	1716	1716	1716				
3.	6. 5. 2	Casuum								
3.	6. 3. 4									
3.	4. 5. 4									
3.	6. 4. 3									
3.	5. 5. 3									
3.	5. 4. 4									

PROBLEMA XI.

Propositum sit, sex tesserae jactibus sex ejus hedras jacere, singulas singulis, sic ut nulla hedrarum bis redeat. Queritur expectatio ad hoc efficiendum?

Patet, singulos tesserae jactus sex casibus subesse pro numero hedrarum. Harum nulla aleatori primo jactu contraria est; secundo jactu hedra primi jactus ei est adversa, caeteris tantum quinque faventibus. Tertio jactu hedrae duorum praecedentium jactuum ipsi nocent, faventque tantum 4 reliquae. Ita quarto jactu duntaxat ipsi profunt hedrae 3, quinto tantum duae, & sexto unica. Problema igitur huc redit, ut inveniatur expectatio ejus, qui successivè sexies praestare debet aliquid, summa omnium casuum in singulis aleis existente 6, numero verò casuum ipsi faventium in primâ aleâ 6, in secundâ 5, in tertiâ 4, & sic porro. Hæc ad Prop. XII. pr. part. generaliter inventa est $\frac{beh \&c.}{adg \&c.}$ ubi *b, e, h* &c. seorsim valent 6, 5, 4 &c.

a, d, g &c. verò singulae 6: unde $\frac{beh \&c.}{adg \&c.} \infty \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} \infty$
 $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} \infty \frac{5}{324}$.

PROBLEMA XII.

Propositum sit, sex tesserae jactibus sex hedras ordine jacere, primo jactu unum punctum, secundo duo puncta, tertio tria &c. Queritur expectatio ad hoc praestandum?

Quia sex hedrae ordine jaciendae sunt, aleator in singulis jactibus non nisi unum casum habet, qui sibi prodesse possit: unde cum hinc singulae literarum *b, e, h* &c. valeant 1, erit expectatio quaesita $\frac{beh \&c.}{adg \&c.} \infty \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} \infty \frac{1}{46656}$.

PROBLEMA XIII.

Tres collusores A, B, C, quorum singuli scriptas ante se habent sex primas notas numerales, alternatim tesserâ ludunt hâc conditione, ut quem quisque punctorum numerum jecerit, ex suis notis deleat; aut, si non habeat amplius, sequens ludere pergat, donec quis primus omnes sex notas deleverit. Contingit autem, ludo aliquandiu continuato, ut ipsi A restent adhuc notæ 2, ipsi B 4, & C 3; ordoque jaciendi tangat ipsum A. Queruntur ipsorum sortes?

Problema hocce plus laboris & patientiæ quàm ingenii requirit: ob magnam enim casuum varietatem numeri protinus in immensum excrescunt; nec novi malo medelam, nisi putemus operationem aliquantulum contrahi posse, si ex fortibus aleatorum, quæ in singulos jactus mutantur, illas tantùm investigemus, quas post ternos quosque jactus acquirunt, cùm vices ludendi ad ipsum A redierint. Hunc in finem considero, quòd, dum collusores successivè tres jactus instituunt, fieri possit, ut vel nullus collusorum, vel unus, vel duo, vel omnes tres aliquam ex suis notis superstilibus jaciant: quot casibus autem unumquodque horum fiat, ex Reg. Pr. XII part. 1. subnexa perspicuum est, juxta quam (si numerum notarum superstitem pro ordine collusorum vocemus b, e, h , numerum deletarum c, f, i ; summam utriusque $b + c$ vel $e + f$ vel $h + i$ ∞a $\infty 6$ numero hedrarum unius tesseræ) numerus casuum, qui nulli collusorum delendam notam significant, eosque adèd in pristino statu relinquunt, invenitur cfi ; eorum qui soli A, bfi ; qui soli B, eci , &c. ut ex

appo-

apposito laterculo apparet; numerus verò omnium casuum $a^3 \infty 6.6.6 \infty 216$, rejectisque per Cor. 4. Prop. 3. part. 1. iis, quibus collusorum sortes invariatae manent, numerus caeterorum $a^3 - cfi$.

Null.	A	B	C	A & B	A & C	B & C	A, B & C.
<i>cfi</i>	<i>bfi</i>	<i>eci</i>	<i>bcf</i>	<i>bei</i>	<i>bbf</i>	<i>ebc</i>	<i>beb.</i>

Quibus praemissis sortes collusorum supputo ad omnes status, in quos ludum continuando pervenire possunt, incipiendo à simplicissimo, & pergendo ad omnes sequentes usque ad statum propositum; ordine quem hinc subjungo; quandoquidem nullius sequentium fors haberi potest, quin sortes omnium praecedentium comperae habeantur:

A	I. I. I	I. I. I	I. I. I	I. I. I	2. 2. 2	2. 2. 2	2. 2. 2	2. 2. 2
B	I. I. I	2. 2. 2	3. 3. 3	4. 4. 4	I. I. I	2. 2. 2	3. 3. 3	4. 4. 4
C	I. 2. 3	I. 2. 3	I. 2. 3	I. 2. 3	I. 2. 3	I. 2. 3	I. 2. 3	I. 2. 3

Primò pono, singulis collusorum unicam superesse notam, quo casu literae *b, e, b*, singulae valebunt 1, & singulae *c, f, i*, 5; consideroque quòd primus A victoriâ potiatur, sive ipse solus, sive una cum alterutro vel utroque reliquorum, proximis tribus jactibus notam suam superstitem jecerit: sed quòd secundus B tum demùm vincere possit, cum vel solus vel cum tertio C id praestiterit: tertius verò C non nisi cum solus id effecerit; unde sortes ipsorum hae fient:

$$\begin{aligned} \text{fors A} &\infty \frac{bfi + bei + bbf + beb}{a^3 - cfi} \infty \frac{a ab}{a^3 - cfi} \infty \frac{36}{91} : \text{fors B} \infty \frac{eci + ebc}{a^3 - cfi} \\ &\infty \frac{acc}{a^3 - cfi} \infty \frac{30}{91} : \text{fors C} \infty \frac{bcf}{a^3 - cfi} \infty \frac{25}{91} . \end{aligned}$$

Fingo deinde, singulis priorum duorum restare unam; & tertio C duas notas; quo pacto valor lit. *b* est 2, & *i*, 4: perpendoq; quòd in proximo jactuum ternario omnia eodem modo eveniant, sicut in praeced. hypoth. excepto tantum, cum solus C notam suam superstitem jecerit: tum enim nemo adhuc vincit, sed omnes in eum statum perveniunt, qui in dictâ hyp. praeced. suppositus fuit. Unde

fient

$$\begin{aligned} \text{fient fortes, } A &\propto \frac{a a b . 1 + h c f . 36 : 91}{a^3 - c f i} \propto \frac{36 . 1 + 50 . 36 : 91}{116} \propto \frac{2538}{5278} : \\ B &\propto \frac{a e c . 1 + h c f . 30 : 91}{a^3 - c f i} \propto \frac{30 . 1 + 50 . 30 : 91}{116} \propto \frac{2115}{5278} : C \propto \\ h c f . 25 : 91 &\propto \frac{50 . 25 : 91}{116} \propto \frac{625}{5278} . \end{aligned}$$

Atque ita reliquorum etiam statuum sortes perquiri possunt. Sed calculus integer est hominis otio abundantis: nos occupatiores ad alia transimus.

P R O B L E M A X I V .

Duo Collusores A & B, tessera in alveum projecta, conveniunt inter se, ut quot ejus puncta ceciderint, tot jactus uterque instituat, illeq; depositum auferat, qui plura summam puncta jecerit; sin autem equalis punctorum numerus ambobus contingat, equaliter etiam depositum inter se partiantur. Mox vero collusorum alter B ludi pertasus loco incertae aleae certum punctorum numerum assumere, & punctis 12 pro rata sua acquiescere mavult. Annuit A. Queritur uter altero, & quanto potiore vincendi spem habeat?

Determinandum ante omnia, an primus tesserae jactus accenseri debeat jactibus collusoris A, necne. Ponamus primò non accenseri: idcirco

Si primo jactu unum punctum cadit, collusor A unum duntaxat jactum instituet, qui ad summum ipsi senarium adducere potest; unde cum B ex pacto sumserit puncta 12, A necessariò perdet, nihilque depositi habebit.

Si primo jactu duo cadant puncta, A duos tesseræ jactus instituet, seu (quod per Annot. Prop. 12 pr. part. tantundem valet) duabus tesseris unum jactum: sed in duabus tesseris sunt casus 36, quorum unicus tantum est punctorum 12, qui ipsi A ex pacto semissem depositi lucratur; cæteri omnes sunt pauciorum punctorum, quibus ille nihil acquirit; unde tum fors ejus est $\frac{1 \cdot 1^2 + 35 \cdot 0}{36} \infty \frac{1}{72}$.

Si primo jactu cadat ternarius, collusori A tres tesseræ jactus concedendi, seu (quod perinde) tribus tesseris jactus unus. Reperiuntur autem in tribus tesseris casus 216, quorum 25 sunt duodecim, 135 pauciorum, & cæteri 56 plurium punctorum: unde habebit ex pacto 25 casus ad semissem depositi, 135 ad nihil, & 56 ad totum depositum; quod ipsi tunc valet $\frac{25 \cdot 1^2 + 135 \cdot 0 + 56 \cdot 1}{216} \infty \frac{137}{432}$.

Eodem pacto, si primo jactu quaternarius obtingat, fors collusoris A fiet $\frac{125 \cdot 1^2 + 310 \cdot 0 + 861 \cdot 1}{1296} \infty \frac{1847}{2592}$; & si quinarius, fors erit $\frac{305 \cdot 1^2 + 457 \cdot 0 + 7014 \cdot 1}{7776} \infty \frac{14333}{15552}$; si denique senarius, fors ejus prodibit $\frac{456 \cdot 1^2 + 462 \cdot 0 + 45738 \cdot 1}{46656} \infty \frac{7661}{7776}$.

Jam verò æquè facillè contingere potest, ut primo tesseræ jactu unum, duo, tria, 4, 5 vel 6 puncta cadant; idcirco fors collusoris A, quam ab initio ludi habet, per Prop. 2. pr. part. est sexta pars aggregati omnium sortium particularium $0, \frac{1}{72}, \frac{137}{432}, \frac{1847}{2592}, \frac{14333}{15552}, \frac{7661}{7776}$; videlicet $\frac{1}{3} \cdot \frac{225}{104}$; & relinquitur pro sorte collusoris B, $\frac{15822}{31104}$.

Ponamus deinde, primum tesseræ jactum, qui numerum jactuum Collusoris A determinare debet, & ipsum his jactibus accensendum esse: quo posito, si prima vice unum punctum cadit, liquet A perditurum. Idem intellige, si duo puncta ceciderint; tum enim ipsi

ipsi A unicus jactus restat. quo sex ad summum puncta jacere potest, quæ addita primi jactus binario non nisi 8 puncta efficiunt, cum alteri B 12 concesserit.

Si prima vice tria jaciantur puncta, duo supersunt peragendi jactus à collusore A, quibus 36 casus respondent. Hos inter sunt 4, qui ipsi afferunt puncta 9 (h. e. connumerato primi jactus ternario, puncta 12) 26 casus, qui pauciora; & 6 qui plura. Habet ergo tum 4 casus ad $\frac{1}{2}$, 26 ad 0, & 6 ad 1; id quod ipsi sortem parit $\frac{2}{9}$.

Si primo jactu collusori A quaternarius obtingat, tres ipsi jactus insuper instituendi sunt, in quibus 216 casus reperiuntur. Horum sunt 21, qui ipsi adducunt puncta 8 (id est, si 4 primi jactus puncta accenseas, puncta 12) 35 casus, qui puncta pauciora, & 160 qui plura; unde fors collusoris A fiet $\frac{21 \cdot 1 \cdot 2 + 35 \cdot 0 + 160 \cdot 1}{216} \infty \frac{341}{432}$.

Ad eundem modum reperitur fors ejus, si primo jactu quinari-
rius evenerit, $\frac{1271}{1296}$; & ubi senarius, $\frac{15545}{15552}$.

Ergo, cum primo jactu omnes sex hedræ unius tesseræ æquè sint in proclivi, sequitur, sortem collusoris A, quam ab initio ludi obtinet, fore sextam partem aggregati omnium sortium particularium 0, 0, $\frac{2}{9}$, $\frac{341}{432}$, $\frac{1271}{1296}$ & $\frac{15545}{15552}$, videl. $\frac{45529}{93312}$; sic ut collusori B relinquatur $\frac{47783}{93312}$, qui proinde in utraque hypothesi potiore[m] vincendi spem habet.

Ut Lectores nostri exemplo discant, quàm cautè in his ratiociniis sit versandum, ne quis nubem pro Junone captet; non abs re me facturum spero, si hîc subnectam specimen solutionis alicujus spurix atque fallacis ejusdem Problematis, quâ quærere quis posset valorem expectationis in ipsis punctis, & quam, priore solutione non cognitâ, legitimam & genuinam esse facile juraret. Nimirum in 1. *hypoth.* si contingit, ut collusor A unicum jactum instituere debeat, illo jactu vel 1, vel 2, 3, 4, 5, vel deniq; 6 puncta impetrabit, quorum unumquodque eum pari facilitate accidere possit, valebit hoc ipsi per Prop.

2. part. 1. $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} \infty \frac{3\frac{1}{2}}{X 2}$ puncta, medium arithmeticum

ticum inter 1 & 6. Sin ipso contingunt duo jactus instituendi, illis jactibus vel 2, 3, 4 &c. vel denique 12 puncta consequetur; & quia unus casus est, quo 2 puncta, & unus quo 12: duo verò casus quibus 3 & duo quibus 11: nec non tres casus quibus 4, & totidem quibus 10 puncta acquirit, & sic porrò; censetur ejus expectatio, per Prop.

$$\begin{aligned}
 & 3. \text{ part. } 1. \text{ punctorum } \frac{1.2 + 1.12 + 2.3 + 2.11 + 3.4 + 3.10 + 4.5 + 4.9}{36} \\
 & + \frac{5.6 + 5.8 + 6.7}{36} \infty \frac{1.2 + 12 + 2.3 + 11 + 3.4 + 10 + 4.5 + 9 + 5.6 + 8}{36} \\
 & + \frac{6.7}{36} \infty \frac{1.14 + 2.14 + 3.14 + 4.14 + 5.14 + 6.7}{36} \infty \frac{15.14 + 6.7}{36} \infty \\
 & \frac{18.14}{36} \infty 7, \text{ quod medium quoq; arithmeticum est inter extrema pun-} \\
 & \text{cta } 2 \text{ \& } 12.
 \end{aligned}$$

Quòd si ipsum tres jactus instituere contingit, poterit illis jactibus impetrare 3, 4, 5 &c. usq; ad 18 puncta, quorum quæ ab extremis 3 & 18 æquè sunt remota, æquali semper casuum numero subjacent; unde eodem modo ostendetur, quòd ejus expectatio tum valeat puncta $10\frac{1}{2}$, medium itidem arithmeticum inter extrema 3 & 18. Pariter etiam, si 4, 5 aut 6 jactus ipsi peragendi sunt, ejus expectatio inter 4 & 24, inter 5 & 30, inter 6 & 36, qui sunt extremi numeri punctorum quæ 4, 5 & 6 tesseri evenire possunt, media erit, adeoque punctorum 14, $17\frac{1}{2}$ & 21. Quare cum æquè facile contingere possit, ut collusor A vel 1, vel 2. 3, 4, 5 aut 6 jactibus defungi teneatur, æquam etiam habebit expectationem ad puncta $3\frac{1}{2}$, 7, $10\frac{1}{2}$, 14, $17\frac{1}{2}$ & 21; qui numeri cum & ipsi sint in arithmetica progressionem, interque extremos medius existat $12\frac{1}{4}$, indicant expectationem hanc æstimandam esse $12\frac{1}{4}$ punctorum.

Haud absimili ratione in 2^{dâ} *hypoth.* procedere licet: nam si collusor A prima vice unum jaciatur punctum, habebit unum. Si duo jecerit puncta, habebit puncta 2, & præterea adhuc unum jactum, qui ipsi per ante dicta valet $3\frac{1}{2}$ puncta; adeoque cum duobus illis habebit puncta $5\frac{1}{2}$. Si tria ipsi puncta ceciderint, habebit præter hæc 3 puncta duos jactus, quos ipsi valere diximus 7 puncta; proinde in totum habebit puncta 10. Non secus si 4, 5 aut 6 puncta primo jactu evenierint, ostendetur habere $14\frac{1}{2}$, 19 aut $23\frac{1}{2}$ puncta. Unde cum initio pari facilitate 1, 2, 3, 4, 5 aut 6 puncta jacere possit, æquam itidem

& (pro

& (propter arithmetica progressionem) mediam inter 1, $5\frac{1}{2}$, 10 $14\frac{1}{2}$, 19 & $23\frac{1}{2}$ puncta expectationem obtinebit; quæ quidem rursus est ut antea punctorum $12\frac{1}{4}$.

Itaq; cum in utraq; hypothese collusor A habere censeatur puncta $12\frac{1}{4}$, quorum alteri B tantum 12 concessa sunt, colligendum videtur, expectationem ipsius A potiore esse quam B. Hujus autem contrarium ex priore solutione, quæ sua luce radiat, apparet; quam profectò difficile dictu est, cur ille plura quam hic puncta, minorem autem depositi partem expectet, cum tamen acquisitio depositi vi pacti pendeat à punctorum pluralitate.

P R O B L E M A X V.

Cæteris positis, ut ante, Collusor B pro rata sua quadratum numeri punctorum primi jactus concedi sibi postulat. Queritur nunc ratio sortium?

Distinguantur rursus hypotheses:

1. *Hypoth.* Intelligatur jactus primus non accenseri jactibus collusoris A: Igitur si primo jactu unum punctum cadit, Collusori B ex pacto quoque tantum unum tribuitur, dum alter A instituet unum jactum, è cujus 6 casibus unus est, qui unicum; & 5 qui plura ei puncta advehunt: adeoque 1 casus qui ipsum ex semisse, & 5 qui ipsum ex asse victorem reddunt; id quod sortem ei parit $\frac{1 \cdot 1:2 + 5 \cdot 1}{6} \propto \frac{11}{12}$.

Si primo jactu binarius, ipse B ex pacto habebit bis duo seu 4 puncta, dum collusori A duo jactus concedendi: sunt autem in 2 jactibus 36 casus, interque illos tres punctorum tot quot habet B, nempe punctorum 4; ut & tres pauciorum punctorum, & 30 plurium: unde fors ipsius A fit $\frac{3 \cdot 1:2 + 3 \cdot 0 + 30 \cdot 1}{36} \propto \frac{7}{8}$.

Si primo jactu ternarius evenit, acquiruntur ipsi B ter tria seu 9 puncta, ipsique A 3 jactus, qui casus præbent 216. Hos inter sunt
X 3 25 pun-

25 punctorum novem (tot scil. quot habet B) 56 pauciorum & 135 plurium punctorum; quod sortem efficit $\frac{25 \cdot 1:2 + 56 \cdot 0 + 135 \cdot 1}{216}$
 $\infty \frac{295}{432}$.

Simili discursu reperitur, si primo jactu quaternarius, quinaris vel senarius prodierit, sortem collusoris A fore $\frac{745}{2592}$, $\frac{7}{288}$, aut $\frac{1}{9312}$. Cum igitur omnes 6 casus primi jactus sint æquè proclives, sexta pars aggregati harum fractionum $\frac{1}{12}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{295}{432}$, $\frac{745}{2592}$, $\frac{7}{288}$ & $\frac{1}{9312}$, nempe $\frac{2592923}{559872}$ indicabit quæsitum; unde alteri B relinquatur $\frac{299879}{559872}$.

2. *Hypoth.* Sit nunc primus jactus & ipse computandus cum jactibus collusoris A: quo posito

Si unum prodeat punctum, liquet utrumque collusorum habere punctum, adeoque depositi semissem.

Si duo emergant puncta, habebit B ex pacto puncta 4, alterq; A præter jactum quo jam functus est adhuc alium instituet, è cujus 6 casibus unus est, qui 2 puncta (i. e. si primi jactus binarium unà computes, 4 puncta, tot scil. quot B habet) unus itidem casus qui pauciora, & 4 qui plura ipsi afferunt: unde fors ejus tunc erit $\frac{1 \cdot 1:2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{6} \infty \frac{3}{4}$.

Si tria jaciantur puncta, B puncta 9 habebit, A verò præcedenti jactui duos adhuc superaddet, qui 36 casibus sunt subjecti. Ex horum numero sunt 5 qui sex ipsi puncta producant (h. e. comprehenso primi jactus ternario totidem, quot B habet) 10 casus qui pauciora, & 21 qui plura; id quod collusori A sortem progenerat $\frac{5 \cdot 1:2 + 10 \cdot 0 + 21 \cdot 1}{36} \infty \frac{47}{72}$.

Simili ratiocinio colliges, si primâ vice 4, 5 vel 6 puncta cadant, sortem collusoris A futuram $\frac{137}{432}$, $\frac{35}{864}$ vel $\frac{1}{15552}$. Ob sex igitur casus primi jactus æquè proclives, sexta pars aggregati omnium fractionum $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{47}{72}$, $\frac{137}{432}$, $\frac{35}{864}$ & $\frac{1}{15552}$, nempe $\frac{55155}{93312}$ ostendet quæsitum; ita ut collusori B relinquatur $\frac{58157}{93312}$, cui sic rursus in utraque hypothesi potior expectatio contingit.

PRO-

PROBLEMA XVI.

*Æstimatio sortis in ludo, dicto
Cinq & neuf.*

In Gallia, Dania, Suecia, Belgio, inferiore Germania & locis finitimis aleæ quoddam genus in usu est, quod vocant *Cinq & neuf*, quodque inter duos collutores A & B duabus tesseris instituitur, ludendi vices perpetuas in se recipiente altero eorum A. Conditiones ludi sunt tales: Si A prima vice jaciat 3 vel 11, aut puncta duplicata quæcunque (*un doublet, ein Pasch*) putà duas unitates, duos binarios, ternarios &c. vincit ipse A: si jaciat 5 vel 9, vincit alter B, si alium quemvis punctorum jecerit numerum, putà 4, 6, 7, 8, vel 10 neuter eorum adhuc vicit, sed ludum prosequi tenentur, donec aut 5 vel 9 puncta ceciderint, quo casu ipse semper B victor erit; aut donec idem præcisè punctorum numerus, qui primo jactu prodiit, redierit; qui casus ipsum A victorem reddit: conditio enim de jaciendis punctis 3 vel 11, aut duplicatis quibusvis ipsi non nisi in primo jactu prodest. Quibus positis quæritur ratio sortium?

Quoniam collutor A, quatenus prima vice 4, 6, 7, 8 aut 10 puncta jacere potest, ad sortes pervenit etiamnum incognitas & inexploratas, hæc ante omnia veniunt investigandæ.

Ponamus itaque prima vice jecisse quaternarium, & nunc in procinctu esse alterum instituendi jactum. Quare cum in duabus tesseris tres sint casus, qui eundem quaternarium revehunt, ipsumque A victorem ludi reddunt; & octo alii qui 5 vel 9 puncta afferunt, eique depositi jacturam causantur; dum cæteri omnes ipsum ad repetitionem jactus obligant, eoque non plus efficiunt per Cor. 4. Prop. 3. part. 1. quàm si prorsus abessent; idcirco fiet ejus expecta-

tio $3 \cdot \frac{1}{11} + \frac{8 \cdot 0}{11} = \frac{3}{11}$. Atque hæc quoque illi fors acquiritur, si primo jactu denarius ceciderit, cum in duabus tesseris denario & quaternario æqualis casuum numerus respondeat.

Pona-

Ponamus deinde, primo jactu prodiisse senarium. Itaque cum 5 casus sint, quibus altero jactu idem redire potest senarius, dum rursus 8 aliis 5 vel 9 puncta obtingere possunt; sequitur nunc collusorem A 5 habere casus pro se, & 8 contra se, (neglectis, ut antea, reliquis, qui ipsum in eodem statu relinquunt) quod sortem ei parit

$\frac{5 \cdot 1^1 + 8 \cdot 0^0}{13} \propto \frac{5}{13}$. Quanta quoque illius expectatio est, si primo jactu octonarius evenerit; cum senarius & octonarius eidem casuum numero sint obnoxii.

Ponamus denique, primo jactu cecidisse septenarium. Unde cum idem septenarius sequenti jactu sex casibus redire possit, erunt nunc 6 casus, pro collusore A, dum 8 ut antea sunt pro adversario;

quod sortem ipsius A efficit $\frac{6 \cdot 1^1 + 8 \cdot 0^0}{14} \propto \frac{3}{7}$.

His ita inventis pergo in Problemate, considerando statum collusoris A ante primum jactum, & examinando quot ille casibus per jactum hunc ad unamquamque præcedentium sortium pervenire possit: Primò constat, in tesseris duabus sex esse casus punctorum duplicatorum quorumque, ut & quatuor alios punctorum trium vel undecim, adeoque 10 in universum casus, qui collusorem A ex ludi præscripto totius depositi dominum reddunt. Deinde etiam liquet, ut jam insinuatum est, 8 esse casus punctorum quinque vel novem, quibus ille contra toto deposito excidit. Præterea numerantur 6 casus quatuor simul & decem punctorum, sed comprehensi in iis ambo casus duplicati binarii & quinari, quibus collusor A toto deposito potitur, quorumque ratio jam habita est; his igitur subtractis remanent tantum 4, qui ipsum ad sortem supra inventam $\frac{3}{11}$ perducent. Porrò habentur casus 10 pro sex & octo punctis, unde demittis iterum duobus pro duplicato ternario & quaternario, relinquuntur 8, qui illum ad sortem supra repertam $\frac{5}{13}$ promovent. Tandem reliqui sunt 6 casus ad puncta septem, quibus supra ostendimus ipsi sortem acquiri $\frac{7}{13}$. Omnibus igitur in compendium redactis, clarum est, expectationem Aleatoris A, quam ab initio ludi habet, fore

$\frac{10 \cdot 1^1 + 8 \cdot 0^0 + 4 \cdot \frac{3}{11} + 8 \cdot \frac{5}{13} + 6 \cdot \frac{7}{13}}{36} \propto \frac{4182}{9009}$, ac proinde collusoris

Iusoris B $\frac{4820}{9009}$, sic ut ratio sortium sit, ut 4189 ad 4820. Unde perspicuum fit, potiolem hujus quàm illius conditionem esse, ut maximè sint qui secus existiment. inque partes ipsius A transire malint.

P R O B L E M A X V I I.

Æstimatio sortis in alio quodam Aleæ genere.

Memini me olim tempore nundinarum quendam hîc vidisse Circulatorem, qui sequens aleæ genus in foro exponebat, eoque prætereuntes alliciebat. Discus erat orbicularis ad libellam compositus, versùs medium parumper acclivis; Limbum circumcingebant 32 loculi seu foraminula contigua & æqualia, quæ in quatuor distincta classes vel series numeris ordine ab I usque ad VIII quater adscriptis signabantur; Medio disci perpendiculariter imminebat fritillus. Fortunam periclitaturus per cavitatem fritilli quatuor demittebat globulos excipiendos in circumferentia disci à totidem loculis, auferebatque præmium quod numeris horum loculorum in summam collectis dicatum conspiciebat, majoris minorisve pretii pro aggregati diversitate, ut ex subjuncto laterculo apparet. Singuli autem globulorum jactus ipsi quaternis nummis redimendi erant. Quæritur ipsius expectatio?

Constat primò, quòd unoquoque globulorum jactu ad minimum 4, ad summum 32 puncta obtineri possunt, quorum utrumvis uno duntaxat casu contingit, illud, si globuli singuli singulorum ordinum prima foramina subintrant, istud si ultima. Deinde observo, quòd casus multiplicentur pro intermediis punctorum numeris, prout ab utrovis extremo 4 aut 32 magis recedunt, & quòd maximo casuum numero sit expositus numerus 18, medius arithmeticus inter 4 & 32; bini autem numeri à medio 18 supra infraque æqualiter remoti æquali quoque casuum numero subsint. Tertio considero, quòd foraminula, quæ quovis jactu globulos excipiunt, vel omnia quatuor signata esse possint eodem determinato numero; vel tria eodem, quar-

Y

tum

<i>Puncta</i>	<i>Nummi</i>		<i>Casus communes.</i>	
4	32	120	180	1
5	31	100	32	16
6	30	30	25	52
7	29	24	24	128
8	28	18	16	245
9	27	10	12	416
10	26	6	8	664
11	25	6	6	976
12	24	6	4	1369
13	23	5	4	1776
14	22	3	3	2204
15	21	3	3	2560
16	20	3	3	2893
17	19	2	3	3088
18		2		3184

tum diverso: vel duo eodem, & reliqua duo alio eodem numero: vel duo eodem, & cætera duo diversis: vel denique omnia quatuor differentibus determinatis numeris; quorum quidem primum unico, alterum 16, tertium 36, quartum 96, ultimum 256 casibus accidere potest. Etenim cum quaterni sint loculi homologi, sive eodem determinato numero putà I notati, si globulorum nonnulli putà tres ab istis loculis sunt excipiendi, liquet hoc tot casibus contingere posse, quot terniones in rebus 4 continentur, nempe quatuor; adeò ut si quartus insuper globulus in aliquem loculum alio numero, ex. gr. II. signatum se recipere debeat (quod ob quatuor uniones in rebus 4 rursus quatuor casibus evenit) concludi possit, quater quatuor seu 16 in universum casus existere, qui efficiant, ut tres globuli tres loculos n.º I signatos & simul quartus unum loculorum n.º II notatorum subintret. Quemadmodum etiam colligere promptum est, ob sex biniones rerum quatuor, sexies sex seu 36 casus haberi, quibus contingat, ut duo loculi n.º I conspicui à duobus, & duo n.º II notati ab aliis duobus globulis occupentur: nec non sexies quater quatuor, h. e. 96 casus, quibus duo loculi num. I à duobus, unus loculorum n.º II à tertio, & unus n.º III à 4.º globulo occupetur: ac denique 4. 4. 4. 4 h. e. 256 casus, quibus unus globulorum in loculum n.º I, alius in loculum n.º II, tertius in loculum III, & quartus in IV se recipiat. Ubi tandem notandum, quod ad variationes illas 24, quæ ex solâ 4 globulorum permutatione mutuâ oriuntur, non attendamus, quippe quæ insuper haberi possunt ceu totidem casus secundarii, ex quibus unusquisque primariorum conflatur,

His

His ita præmissis & intellectis inquirendum est in numerum casuum cuiusvis punctorum numero convenientem, eo ferè modo quo supra post Prop. 9. part. 1. ad numeros jactuum in tessleris investigandos usi fuimus; resolvendo vid. propositum punctorum numerum ob 4 globulos in 4 partes, quarum nulla octonarium superet (quòd loculis majores numeri non sint adscripti) idque omnibus modis possibilibus, ac deinde singulis modis juxta supra observata suos tribuendo casuum numeros; horum enim summa quæsitum exhibebit. At quoniam eâ ratione numerus casuum duntaxat pro dato punctorum numero inveniretur, nobis verò casuum notitia pro universis punctis necessaria est, poterimus aliam compendiosiore inire viam, & omnia una operatione consequi, hoc modo:

In supremo sequentis Tabulæ margine scribantur ordine numeri punctorum à IV usque ad XVIII; sufficit enim horum determinasse casus, cum singuli supra XVIII cum singulis infra in casuum multitudine, uti dictum, convenient.

Ponamus, globulos omnes excipi 4 loculis homologis, erunt eorum numeri vel 4 unitates, vel 4 binarii, ternarii, quaternarii &c. quorum summæ sunt, 4, 8, 12, 16, &c. quare signetur in margine sinistro 1. 1. 1. 1 (cæteris 2. 2. 2. 2 &c. usque ad 8. 8. 8. 8 mente subintellectis) & è regione sub singulis punctorum numeris IV. VIII. XII. XVI. &c. notentur singulæ unitates.

Ponamus tres globulos excipi loculis homologis, quartum diverso: erunt homologorum numeri vel tres unitates, vel totidem binarii, ternarii &c. Si tres unitates, quartus numerus erit vel binarius, vel ternarius, quaternarius &c. qui singuli juncti unitatibus summas efficiunt V. VI. VII. VIII. . . . XI; quocirca in margine signetur 1. 1. 1. 2 (reliquis 1. 1. 1. 3 &c. usque ad 1. 1. 1. 8 mente suppletis) & è regione sub punctis V. VI. VII. . . . XI. scribatur 16. Si homologorum numeri sint tres binarii, quartus erit vel 1, vel 3, vel 4 &c. qui juncti binariis summas exhibent VII. IX. X. . . . XIV; quare in margine ponatur 2. 2. 2. 1 (cæteris 2. 2. 2. 3 &c. subintellectis) & è regione sub singulis punctorum VII. IX. X. . . . XIV. rursus scribatur 16. Similiter etiam procedendum, ubi homologorum numeri sunt tres ternarii, existente quarto 1. 2. 4 aut 5 &c. aut

tres quaternarii, existente quarto 1. 2. 3. aut 5 &c. aut tres quaternarii &c. existente semper quarto uno reliquorum, scribendo nempe 16 sub singulis punctorum summis, quas additi 4 loculorum numeri efficiunt.

Ponamus porrò loculos globulorum duos homologos, & alios duos rursus homologos, sed à prioribus diversos: etunt numeri loculorum vel duæ unitates cum duobus binariis, ternariis, quaternariis &c. qui unitatibus juncti faciunt VI. VIII. X. . . . XVIII: vel duo binarii cum 2 ternariis, quaternariis &c. qui additi binariis constituunt X. XII. XIV. &c. vel duo ternarii cum totidem quaternariis &c. vel duo quaternarii cum totidem quaternariis &c. &c. idcirco notentur in margine Tabulæ 1. 1. 2. 2, 2. 2. 3. 3, 3. 3. 4. 4 &c. (cæteris 1. 1. 3. 3, 1. 1. 4. 4 &c. nec non 2. 2. 4. 4 &c. 3. 3. 5. 5 &c. compendii gratiâ omiſſis) è regione verò sub singulis numerorum tam expressorum quàm mente retentorum summis scribantur 36.

Pergamus deinde ponere loculos globulorum duos homologos, reliquos ab his & inter se diversos: erunt homologorum numeri rursus vel duæ unitates, vel duo binarii, ternarii &c. & si unitates, tertius erit vel binarius cum quarto ternario, quaternario, quinario &c. vel ternarius cum quarto quaternario, quinario &c. & ita consequenter: si duo binarii, tertius esse potest vel 1 cum quarto 3, 4, 5, 6 &c. vel 2 cum 4^{to} 4, 5, 6 &c. vel 4 cum 4^{to} 5, 6 &c. &c. si illi sunt duo ternarii, tertius existet vel 1 cum 4^{to} 2, 4, 5, 6 &c. vel 2 cum 4^{to} 4, 5, 6 &c. vel 4 cum 4^o 5, 6 &c. &c. si illi sunt quaternarii, 3^{tius} poterit esse vel 1 cum 4^{to} 2, 3, 5 &c. vel 2 cum 4^{to} 3, 5 &c. &c. & ita pariter in reliquis omnibus, quamobrem primis harum combinationum 1. 1. 2. 3, 1. 1. 3. 4, &c. nec non 2. 2. 1. 3 &c. 3. 3. 1. 2 &c. in margine notatis & cæteris mente suppletis, scribantur sub singulis punctorum summis, quas singuli numerorum quaternarii efficiunt, 96.

Tandem etiam ponamus, loculos globulorum omnes differentibus numeris affectos esse; erunt ipsorum combinationes tales: 1. 2. 3 cum 4^{to} 4, 5, 6 &c. 1. 2. 4 cum 4^{to} 5, 6, 7 &c. &c. item 1. 3. 4:

1. 3. 5:

Combinat. || IV. | V. | VI. | VII.

I.I.I.I.	I	+	+	
I.I.I.2	+	16	16	
2.2.2.I	+	+	+	
3.3.3.I	+	+	+	
4.4.4.I	+	+	+	
5.5.5.I	+	+	+	

109

Combinat.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.	XVIII.
I.I.I.I.	I	+	+	+	I	+	+	+	I	+	+	+	I	+	+
I.I.I.2	+	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
2.2.2.I	+	+	+	16	+	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
3.3.3.I	+	+	+	+	+	+	16	16	+	16	16	16	16	16	+
4.4.4.I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	16	16	16	+	16	16
5.5.5.I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	16	16	16
I.I.2.2	+	+	36	+	36	+	36	+	36	+	36	+	36	+	36
2.2.3.3	+	+	+	+	+	+	36	+	36	+	36	+	36	+	36
3.3.4.4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	36	+	36	+	36
4.4.5.5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	36
I.I.2.3	+	+	+	96	96	96	96	96	96	+	+	+	+	+	+
I.I.3.4	+	+	+	+	+	96	96	96	96	96	+	+	+	+	+
I.I.4.5	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	96	+	+	+	+
I.I.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	+	+	+
I.I.6.7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	+	+
I.I.7.8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	+
2.2.1.3	+	+	+	+	96	96	96	96	96	96	+	+	+	+	+
2.2.3.4	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	96	96	+	+	+
2.2.4.5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	96	+	+
2.2.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	96	+
2.2.6.7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96
3.3.1.2	+	+	+	+	+	96	+	96	96	96	96	96	+	+	+
3.3.2.4	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	96	96	+	+
3.3.4.5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	96	96
3.3.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96
4.4.1.2	+	+	+	+	+	+	+	96	96	+	96	96	96	96	+
4.4.2.3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	+	96	96	96	96
4.4.3.5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96
5.5.1.2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	+	96	96
5.5.2.3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	+	96
5.5.3.4	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	+
6.6.1.2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96	96	96
6.6.2.3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96
7.7.1.2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	96	96
I.2.3.4	+	+	+	+	+	+	256	256	256	256	256	+	+	+	+
I.2.4.5	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	256	256	+	+	+
I.2.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	256	+	+
I.2.6.7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	+
I.2.7.8	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256
I.3.4.5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	256	256	+	+
I.3.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	256	+
I.3.6.7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256
I.4.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	256
I.4.6.7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256
2.3.4.5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	256	256	+
2.3.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256	256
2.3.6.7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256
2.4.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256	256
3.4.5.6	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	256
Summa Casuum	I	16	52	128	245	416	664	976	1369	1776	2204	2560	2893	3088	3184

Summa omnium Casuum — — 35960.

1. 3. 5: &c. 1. 4. 5 &c. cum 4^{to} &c. nec non 2. 3. 4: 2. 3. 5 &c. cum quarto differenti numero &c. &c. &c. usque ad 3. 4. 5. 6 quâ cum omnes possibiles combinationes sunt completæ: quocirca primis harum combinationum in margine expressis & prætermiſſis reliquis, notentur è regione sub singulis quaternorum numerorum summis, 256; prout hæc omnia in adjunctâ Tabulâ præſtita cernuntur.

Additis igitur in unam summam, qui in eâdem serie perpendiculari sibi respondent, numeris, habebuntur omnes punctorum in vertice scriptorum casus, videl. 1 casus pro punctis IV, 16 casus pro punctis V, 52 pro punctis VI; & ita deinceps usque ad puncta XVIII, qui numerus bis 16, quater 36, decies 96 & octies 256, id est, in universum 3184 casibus expositus est. Et quoniam numeri punctorum supra XVIII cum reliquis infra, singuli cum singulis, putà XIX cum XVII, XX cum XVI &c. in numero casuum conveniunt, ut initio monuimus & ostensu facile est, sequitur, si collecti à punctis IV ad XVII casuum numeri duplentur, duploque 32776 addantur 3184 casus punctorum XVIII, aggregatum 35960 exhibiturum summam omnium omnino casuum. Quòd autem enumeratio ritè facta sit, nullaque combinationum prætermiſſa, vel inde patet, quòd numerus quaternionum in rebus (putà loculis) 32, præcisè idem reperitur; est enim ille, per Cap. 4. part. 2,

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty 35960.$$

Inventis sic numeris casuum pro quovis punctorum numero, cætera oppidò levia sunt, & expediuntur per Prop. 3. part. 1. multiplicando videl. singulos casuum numeros per singula præmia, quæ istis casibus acquiruntur: nempe (cùm punctis IV in sup. latereculo tribuantur nummi 120, punctis XXXII nummi 180, punctis V nummi 100, punctis XXXI nummi 32, punctis VI 30, punctis XXX 25 &c.) multiplicando 1 casum per 120, rursusque per 180; 16 casus per 100, iterumque per 32; 52 casus per 30, nec non per 25 &c. sive brevius, 1 per 300 ∞ 120 + 180, 16 per 132 ∞ 100 + 32, 52 per 55 ∞ 30 + 25, atque ita deinceps usque ad 3184 per 2; ac tandem dividendo omnium produ-

Y 3

ctorum

storum summam per summam omnium casuum 35960. Sic enim exhibunt in quotiente pro expectatione aleatoris nummi $4 \frac{342}{3596}$: unde cum ipse ex hypoth. solis 4 nummis jactum redemerit, apparet potiore illius quam circulatoris sortem esse, istumque proin hoc aleæ genere, ni præmia minuat, non multum lucrari posse.

PROBLEMA XVIII.

De Ludo chartarum, vulgò Trijaques.

Usitatissimum est inter Germanos ludi genus, quod *Trijaques* appellatur, & affinitatem quandam habet cum Gallorum *Brelan*: Sumuntur ex Ludo chartarum folia 24 (rejeclis cæteris) ex unaquaque scil. specie sex; nimirum *Novenarii*, *Denarii*, *Famuli*, *Hera*, *Reges* & *Monades*, quæ suis posthac literis initialibus N. D. F. H. R. M denotabuntur, & hunc dignitatis ordinem inter se servant: Primas tenet *Monas*, sequitur *Rex*, inde *Hera*, *Famulus*, *Denarius*; sed omnibus supereminent *Novenarii* unà cum *Famulo trifolii* (quem proin etiam *Novenariis* accensemus, sic ut 5 habeamus *Novenarios*, at 3 tantum *Famulos*). *Novenariorum* præstantia, similis ferè horum, quos in ludo Hispanico *Jeu de l'Homme* dicto *Matadors*, latrones, homicidas sive sicarios appellant, in eo consistit, ut cujusvis dignitatis & speciei chartis accenseantur: sic duo *Novenarii* cum *Monade*, aut unus cum duabus juncti tres *Monadas*, seu *Trigam* (un *Tricon*) *Monadum* efficiunt: unus, duo vel tres *Novenarii* stipati tribus, duobus unove *Regibus* *Quadrigam* *Regum* constituunt: unus duove *Novenarii* in consortio trium duorumve ejusdem speciei foliorum, quaterna illius speciei exhibent, ex. gr. quaterna corda, spicula, trifolia &c. cujusmodi chartarum complexio *Fluvius*, ein *Fluß* / dici consuevit, qui præterea numero punctorum æstimatur; numerantur autem pro *Novenario* aut *Monade* puncta 11, pro cæterarum dignitatum chartis singulis puncta 10. Modus ludendi talis:

Singulis colludentium ordine bina distribuuntur folia, quibus clam inspectis liberum est primo arbitrariam pecuniæ summam deponere, quocum si congregi velit alter, tantundem deponet, aut
etiam

etiam, ubi visum fuerit, insuper adjiciet aliquid; quod pariter prior superaddere tenetur, si depositi sui jacturam facere nolit. Quo facto singulis, qui ludum ingressi sunt, bina rursus folia exhibentur, sed omnium palàm oculis in mensâ exposita; sic ut cujusque collusoris ludus cæteris ex parte detectus, ex parte occultus sit: tum verò de novo pecuniâ certare incipiunt, aucto, ut antea, alternis deposito, provocatoque pluris semper licitandi potestate concessâ. Tandem aperit unusquisque ludum suum collusoribus, & qui cæteris potioem habere deprehenditur, universo deposito potitur. Potior autem est Quadriga Fluvio, & Fluvius Triga, quibus omnibus præfertur Quadriga Novenariorum. In Trigis & Quadrigis cæteris dignitatis ordo, in Fluviis punctorum numerus attenditur; sic Triga vel Quadriga Monadum prævalet Trigæ vel Quadrigæ Regum, & Fluvius 43 punctorum alium 42 antecellit. Si nemo collusorum Triga, Quadriga Fluviove sit instructus, is qui plura ejusdem speciei puncta numerare potest, deposito potitur. In casu verò omnimodæ paritatis ludorum, ut cum duo ejusdem dignitatis Trigam aut Quadrigam, vel totidem punctorum Fluvium numerant, is alteri victoriam præripit, qui ordine prior est, seu qui primus chartas accepit.

Quibus suppositis & intellectis poterit quilibet collusorum visis primis suis duobus foliis calculo subducere, quæ sibi sit expectatio ad vincendum, indeque colligere, quis in certando modus sit tenendus: quanquam enim licitationem non semper qualitati ludi proportionare debeat, ne collusoribus ludum suum prodat (quandoquidem anima hujus ludi est simulatio, & hîc præcipuè in usum vertendum, quod Galli vocant, *faire bonne mine à mauvais jeu*, ut alii, quibus melior fortasse ludus contigit, fictâ hujus confidentiâ decepti ab ultrâ-certando absterreantur) negari tamen non potest, quin prævia expectationis cognitio ad ipsam hanc simulationem moderandam & gubernandam adjumentum haud leve conferre possit. Nos calculi specimen in unico tantùm exemplo exhibebimus;

Quoniam observatum olim mihi multoties recordor, hunc cui ab initio duo Novenarii obtigerant, non obstante hâc ludi bonitate perdidisse, cupidus sum sciendi, quanto majorem talis vincendi quàm perdendi

perdendi spem habeat. Atque ut quæstionem plene determinem, pono me ordine priorem esse collusore, mihi primis duabus chartis duos obtigisse Novenarios, alterique unum (sive quod hoc ex provocationis meæ acceptatione præsumam, sive quod aliunde mihi constet) & quærendam esse utriusque expectationem.

Primò confidero omnes possibiles status, in quos ludum profectando pervenire possum. Fieri autem potest, ut reliquæ duæ, quas expecto, pagellæ afferant mihi (prout in subjuncta Tabula ordine sub lit. A videre est,) vel duos alios Novenarios, vel Novenarium cum Monade, Rege, Hera, Famulo, Denariove: vel duas Monadas, duos Reges, H. F. Denariosve: vel Monadem cum Rege, H. F. D-riove: Regem cum H. F. D-riove: Heram cum Famulo Denariove: Famulum denique cum Denario; easque dignitates vel ambas ejusdem speciei; vel diversarum specierum, easque rursus tales, ut vel alterutra sit ex specie trifoliorum, vel neutra: ob famulum enim trifolii, qui Novenariis accensetur, disparitas hæc sortes aliquantulum variat.

Deinde examino, quot casibus singula horum evenire possint, considerando, quòd post acceptos à me duos Novenarios & unum à Collusore, supersunt folia 21, interque illa duo adhuc Novenarii, 4 Monades, totidem Reges, Heræ, Denarii, ac 3 Famuli, (nam etiamsi collusor duo quoque folia acceperit, eoque propriè non nisi restent 20; quoniam tamen alterum illorum mihi ignotum est, tantundem hoc valet respectu nescientiæ meæ, acsi non accepisset, egoque ad duo qualiacunque ex 21 foliis æqualem expectationem haberem.) Quibus perpensis facillimum est enumerare casus: casus enim tot sunt, quot foliorum residuorum combinationes. Possunt autem Novenarii residui ambo simul non nisi semel accipi: Novenarius cum Monade aut Rege &c. bis quater seu octies, cum Famulo tantum bis ter seu sexies combinari potest: Binarum autem Monadum aut binorum Regum &c. sunt sex, binorum Famulorum tres electiones: Porro monas cum Rege, aut Hera &c. ejusdem speciei, pro numero specierum quater; Monas aut Rex &c. cum Famulo ter tantum sumi potest. Rursus Monadis & Regis &c. diversarum specierum, quarum tamen altera sit trifoliorum, sex sunt acceptiones; quando-

quandoquidem Monas trifolii cum singulis Regibus, & Rex trifolii cum singulis Monadibus trium reliquarum specierum conjungi potest: quemadmodum etiam Monas trifolii cum Famulo alterius speciei ter conjungitur. Monas denique cum Rege, Herâ, Famulo &c. aut alia duo folia datarum differentium dignitatum & diversarum specierum (sed excluso trifolio) sexies combinantur; cum singulæ ex. gr. trium Monadum cum singulis reliquarum duarum specierum Regibus semel compingi possint. Et sic facili negotio combinationum seu casuum numeri singuli determinabuntur, quemadmodum in media columna sub lit. B notati sunt. Eorum omnium summa vel aggregatum reperitur $210 \infty \frac{21 \cdot 20}{1 \cdot 2}$ quantus etiam est numerus binionum in chartis 21.

Tertiò calculo perquiro, quæ meæ vel collusoris sint expectationes in singulis recensitis statibus; quem in finem considero ante omnia, quòd exhibitis mihi duobus aliis foliis residua sunt folia 19, quorum tria collusori debentur; sic ut ejus ludus tot variationibus obnoxius sit, quot terniones in rebus 19 habentur, nempe $\frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ∞ 969, è quibus quot ipsi faveant, quot adversentur, in quavis ludi mei constitutione porrò explorandum est; Patet autem, quòd sive duobus meis Novenariis accedant duo alii Novenarii, seu Novenarius unus cum Monade, necessario perdere debet collusor; tunc enim habebò Quadrigam Novenariorum aut Monadum, & ego sum ex hypoth. ordine prior collusore, qui Monadum tantùm Quadrigam ad summum consequi potest. Sin Novenariis meis accedat Novenarius cum Rege, habebò Quadrigam Regum, & vinci possum à collusore, si hic Quadrigam Monadum obtineat; unde cum in residuis 19 foliis lateant 5 (unus videl. Novenarius & 4 Monades) quorum terna qualiacunque addita Novenario, quem habere præsumitur collusor, Monadum Quadrigam efficiunt; atque in rebus 5 contineantur terniones 10, sequitur collusorem meum in variationibus 969 habere 10 ad vincendum & cæteros ad perdendum; id quod ipsi sortem parit $\frac{10}{969}$. Si cum Novenario Hera mihi contingat, habebò Quadrigam Herarum, & vincere potest collusor, sive Monadum sive Regum Quadrigam consequatur; quare præter 10 casus priores nunc alios 10, h. e. 20 ad

Z

vincen-

vincendum habet, id quod ipsi valet $\frac{27}{969}$. Similiter si cum Novenario Famulum obtineam, præter 20 casus memoratos vincere potest collufor 10 aliis, quibus quadrigam Herarum confequitur; unde. jam ejus fors exiftit $\frac{37}{969}$. Sed fi Novenarius meus Denario ftipetur, fic ut infuper Quadriga Famulorum colluforem victorem reddere poffit, accedentibus ad priores 30 casus duntaxat 4 aliis, fors ejus fiet $\frac{34}{969}$; quippe cum in foliis 4 (quæ ipfius Novenario Trigam Famulorum addere poffunt) tribus fcil. Famulis & uno refiduo Novenario non nifi terniones 4 habentur.

A	B	C		
2 N	1	0		
N & M	8	0		
N & R	8	10		
N & H	8	20		
N & F	6	30		
N & D	8	34		
2 M	6	0		
2 R	6	20		
2 H	6	40		
2 F	3	60		
2 D	6	70		
M & R	4	70		
M & H	4	70		
M & F	3	74		
M & D	4	70		
R & H	4	96		
R & F	3	100		
R & D	4	96		
H & F	3	100		
H & D	4	96		
F & D	3	100		

			27	
Divers. pec. qua- rum u- na tri- fol.	M & R	6	153	
	M & H	6	153	
	M & F	3	157	
	M & D	6	153	
	R & H	6	309	
	R & F	3	313	
	R & D	6	309	
	H & F	3	445	
	H & D	6	441	
	F & D	3	553	
neutra trifol.	M & R	6	148	
	M & H	6	148	
	M & F	6	152	
	M & D	6	148	
	R & H	6	304	
	R & F	6	308	
	R & D	6	304	
	H & F	6	440	
H & D	6	436		
F & D	6	548		
			210 969	

Ejusd.
spec.

Quòd si Novenariis meis duæ Monades accesserint. rursus infallibiliter perdet collusor: si duo Reges, ipse vincere cum Monadum Quadriga potest; sed propter 4. Monadas & duos nunc residuos Novenarios, i. e. ob sex folia, quorum terniones omnes Novenario collusoris juncti Quadrigam hanc constituere possunt, viginti tunc ad vincendum casus habet. Quibus ob similem rationem accedunt alii 20, si loco Regum duas Heras: & rursus 20, si duos Famulos adeptus fuero. Sed si duos Denarios accepero, præcedentibus tantum superaddendi casus 10; propterea quia sunt folia solum 5 (Famuli scilicet tres & duo residui Novenarii) quorum terniones Famulorum Quadrigam collusori advehere possunt. Unde expectationes illius ordine habentur $\frac{20}{989}$, $\frac{40}{569}$, $\frac{60}{989}$ & $\frac{70}{569}$.

Porro, si Novenariis meis jungatur Monas cum Rege, Hera, Famulo, Denario & homogeneo, habebò Fluvium 43 punctorum, & vincet collusor cum Quadriga qualicunque, non aliter: sin iis accedat Rex cum Hera, Famulo, Denario & homogeneo; aut Hera cum Famulo &c. habebò duntaxat Fluvium 42 punctorum; & vincet collusor cum qualicunque Quadriga, atque insuper cum Fluvio 43 punctorum. Si vero mihi cadat Monas cum Rege heterogeneo &c. habebò solummodo Trigam Monadum, & vincere potest alter cum Quadriga pariter ac Fluvio qualicunque; cujus proinde expectationes pro singulis his statibus pari modo seorsim investigantur, sed eo majori subinde labore, quo major collusori vincendi spes allucescit. Unde cum omnia minutatim prosequi nimis prolixum foret, operationem apponam pro ultima tantum hypothese, quâ pono mihi cecidisse Famulum cum Denario alterius speciei (putà Famulum cordium cum Denario spiculorum) adeoque nonnisi Famulorum Trigame instructum esse. Collusorem itaque victorem reddet Quadriga quæcunque & Fluvius quilibet, nec non Trigam Monadum, Regum atque Herarum: Quadrigarum casus determino, considerando, residua 19 folia consistere præter 2 N in 4 M, 4 R, 4 H, 2 F & 3 D, h. e. (Novenariis ad singulas dignitates adjunctis) in 6 M, 6 R, 6 H, 4 F & 5 D: horum namque terniones ostendunt, obtingere ipsi posse Quadrigam Monadum casibus 20, Regum & Herarum totidem, Famulorum casibus 4 & Denariorum 10, quorum omnium summa dat casus 74. Fluviorum porro multitudinem ita exploro:

Z 2

Attendo,

Attendo, quòd in reliquis 19 foliis præter 2 N reperiuntur 4 spicula, 5 lateres, 4 corda & 4 trifolia; & quòd ad Fluvium constituendum ultra Novenarium, quo collusorem jam compotem esse præsumo, requiruntur vel teina ejusdem speciei folia, vel saltem bina, assumto unà Novenariorum residuorum alterutro: indeque concludo, Fluviorum numerum æquari numero ternionum in omnibus speciebus, unà cum numero binionum bis sumto; quare cùm terniones omnes sint $4 + 10 + 4 + 4 \infty 22$, & biniones omnes $6 + 10 + 6 + 6 \infty 28$, sequitur, summam casuum ad Fluvios fore $22 + 28 + 28 \infty 78$. Ad Trigas denique quod attinet, earum numerum inire possum, si perpendam, quòd ad Trigam Monadum (Regum sive Herarum) constituendam, Novenario quo jam pollet collusor jungendæ vel binæ Monades (Reges aut Heræ) vel singulæ unà cum assumto Novenariorum residuorum alterutro: si binæ junguntur, quartum folium poterit esse quodlibet ex reliquis 13; adeo ut, cùm 4 Monades (Reges, Heræ) sexies possint binæ accipi, sexies quoque 13, i. e. 78 hinc variationes orientur: si una sola Monas (Rex aut Hera) ei jungitur cum Novenariorum reliquorum alterutro, pro quarto folio accipi poterit unumquodvis ex reliquis speciebus, quod sit inferioris dignitatis; nimirum cum Monade laterum sigillatim possunt accipi 9 folia, & cum singulis reliquis 10; cum Rege laterum 6, & cum singulis reliquis 7; cum Hera laterum 3, & cum singulis reliquis 4; unde Monadum casus emergunt 39, Regum 27, Herarum 15, qui numeri ob duos residuos Novenarios bis sumpti & postmodum seorsim additi supra inventis 78 aliis variationibus producunt Trigas Monadum 156, Regum 132, & Herarum 108, quæ rursus collectæ faciunt 396. Quoniam igitur repertum nobis est, omnes Quadrigarum casus esse 74, Fluviorum 78, & Trigarum, quæ quidem collusorem victorem reddere possunt, 396, sequitur quòd conflatis in unam summam his numeris aggregatum 548 designet omnes in universum casus, quibus ille victoria potiri possit; adeò ut ejus fors existat $\frac{548}{969}$, quemadmodum etiam supra in laterculo sub lit. C. videre est, ubi ordine notati habentur numeratores fractionum, quæ exprimunt expectationes collusoris in quovis ludi mei statu, quarumque omnium communis denominator existit 969.

His

His verò inventis, ut exploretur fors, de qua principaliter quæstio mota fuit, quam nimirum habemus priusquam ego postrema duo folia accipiam, nil superest aliud, quàm ut numeros casuum columnæ B ducamus in numeratores respondentes columnæ C, & summam productorum dividamus per productum numeri omnium casuum 210 in communem denominatorem 969: vel, quod brevius, ut numeratores omnes col. C, quibus æqualis casuum numerus in col. B respondet, prius addantur, ac tum summa per illum casuum numerum multiplicetur; tandemque productorum omnium aggregatum dividatur, ut antea. Et sic quidem reperio, collusoris mei

sortem esse $\frac{3 \cdot 1902 + 4 \cdot 498 + 6 \cdot 4614 + 8 \cdot 64}{210 \text{ in } 969} \infty \frac{35894}{203490} \infty \frac{17247}{101745}$; unde mea fiet $\frac{83798}{101745}$, paulo minùs quàm 5^{ies} potior altera.

Cæterum examinanti Tabellam primo obtutu multa alia Theoremata ultro se offerunt, qualia sunt hæc: Quòd ad æquam perveniam expectationem per Novenarium cum Hera, atque per duos Reges; item, per duos Denarios, atque per Monadem cum Rege, Hera, Denariove homogeneo: Quòd optabilior mihi sit Novenarius cum Famulo Denariove, quàm duæ Heræ: Quòd duo differentium dignitatum & specierum folia semper tantillo præstabiliora sint, si neutrum, quàm si alterutrum trifolium foret: Quòd Hera cum Denario alterius speciei meam, Famulus cum Denario collusoris conditionem paulo potiorem reddat &c.

Et hæc quidem omnia ita se habent in hypothesi, quæ supponit duos mihi ab initio Novenarios, unum collusori obtigisse; nam si de neutro collusoris folio mihi constare supponatur, aliæ prodibunt expectationes & alia Tabula, quam industrius Lector mutatis mutantis simili modo concinnabit. Inveniet autem. si calculum ritè subduxerit, sortem meam hoc casu ad collusoris sortem se habere, ut 346988 ad 26077, adeoque nunc plus quam tredecies hâc meliorem esse.

Animus præterea fuerat, quasdam alias quæstiones, de quibus frequens inter collusores sermo miscetur, solutas hîc tradere; ex. gr. An præstabiliior sit ab initio ludi Novenarius cum Famulo Denariove

114

riove, an vero duæ Monadas? Aut uter duorum, quorum alter ab initio duas obtinuit Monadas, alter Novenarium cum Famulo Denariove, potioem vincendi spem habeat? & similes. Sed quia futilibus nimiam jam impendisse operam videri possum, hæc & alia rerum harum curioso Lectori indaganda & calculo definienda relinquo.

PROBLEMA XIX.

In quolibet Alea genere, si ludi Oeconomus seu Dispensator (le Banquier du Jeu) non nihil habeat prærogativa in eo consistentis, ut paulo major sit casuum numerus quibus vincit quàm quibus perdit; & major simul casuum numerus, quibus in officio Oeconomi pro ludo sequenti confirmatur, quàm quibus œconomia in collusorem transfertur. Queritur, quanti privilegium hoc Oeconomi sit æstimandum?

Sit in quolibet aleæ jactu numerus casuum quibus vincit œconomus, ad numerum casuum quibus perdit, in ratione p ad q , majoris ad minus: item numerus eorum quibus ipsi œconomia pro jactu sequenti confirmatur, ad numerum horum quibus illa in collusorem transfertur, in ratione m ad n , rursus majoris ad minus. Evidens est, si solius præsentis, nulla sequentis ludi haberetur ratio, fore (propter p casus ad depositum 1, & q ad 0) sortem œconomi $\frac{p}{p+q}$, collusoris $\frac{q}{p+q}$, & ambas in ratione p ad q . Sed si ad futuros quoque ludos respiciatur, res plus obscuritatis habet, nec obvium statim est, quomodo prærogativa præsentis ludi & spes ad præro-

prærogativam sequentis conjunctim sint æstimandæ ; ac proinde facilis in paralogismos prolapsus est, nisi probè advertatur. Memini me aliquando sic argumentatum fuisse: Si idem perpetuò maneret œconomus, semper eandem haberet prærogativam seu sortem, quam ratio p ad q definit; igitur quando periculum est amittendæ œconomiae, hæctenus pejor ejus conditio censenda videtur. Sit hæc x , & collusoris y ; fiet (ob p casus ad 1, q ad 0, m casus ad permanendum in statu œconomi, & n casus ad acquirendum statum collusoris) $x \propto \frac{p + mx + ny}{p + q + m + n}$, & simili modo fors collusoris $y \propto \frac{q + my + nx}{p + q + m + n}$; quibus æquationibus debite inter se collatis habetur $x : y :: p + n : q + n$ minor, uti collegeram, quàm p ad q . Alia vice sic arguebam: Si œconomus debeatur $\frac{p}{p + q}$, collusori $\frac{q}{p + q}$ depositi, sintque m casus quibus ille in statu œconomi confirmatur, & n casus quibus in statum alterius transit, erit fors ejus $\frac{m \cdot p : p + q + n \cdot q : p + q}{m + n} \propto \frac{mp + nq}{m + n \cdot p + q}$, relinquiturque alteri $\frac{mq + np}{m + n \cdot p + q}$; sic ut ratio sortium fiat, ut $mp + nq$ ad $mq + np$, rursum minor quàm p ad q , etsi diversa ab alterâ $p + n$ ad $q + n$. Vix autem ita collegeram, cum utrumque hoc ratiocinium rursus ceu præposterum & fallax rejeci, quippe cui summè videbatur ἀτοπον, ut major probabilitas retinendi quàm amittendi munus œconomi minuere potius quàm augere dicatur prærogativam œconomiae annexam: quare aliquandiu eo propendebam, ut crederem prærogativam hanc compositam esse debere ex utraq; ratione p ad q , & m ad n ; adeoq; sortem œconomi ad collusoris sortem esse in ratione pm ad qn , maiore quàm p ad q , vel m ad n seorsim. Verùm nec istud assertum evidentiae quicquam habere sensi, quin & reapse à vero abluere deprehendi, postquam genuinum solvendi modum reperissem. Nolo autem ostendere, in quo laborent allata ratiocinia. ad veriore potius sine morâ solutionem transiturus, præ cuius jubare spurium illorum lumen mox ultrò dispariturum puto.

Hanc qui legitimè investigare cupit, ad duo advertere debet: unum, ut per Coroll. 5. Propos. 3. part. 1. determinet, quantum œcono-

œconomus non ex toto deposito, sed ex solâ collusoris pecunia debeatur: alterum, ut hanc illi debitam portionem pro singulis subsequen-
tibus jactibus sive ludis seorsim exploret, quo omnium additione to-
talis expectatio pateat. Posito itaque Aleatores ita inter se convenisse,
ut post quemlibet jactum victus victori tradere teneatur a , liquet,
habere œconomum in primo jactu p casus ad lucrandum a , & q casus
ad perdendum a , h. e. ad acquirendam $-a$; adeoque partem ipsi de-

bitam ex collusoris pecunia esse $\frac{p \cdot a + q \cdot -a}{p+q} \propto \frac{p \cdot a - q \cdot a}{p+q}$ seu (factis
 $p - q \propto r$, & $p + q \propto s$) $\frac{ar}{s}$: quemadmodum contra collusor, ob

q casus ad lucrandum a , & p ad perdendum, habere censetur $\frac{-ar}{s}$.

Et quoniam præterea œconomus in primo jactu habet m casus, qui-
bus privilegium œconomiae retinet, h. e. quibus acquirit pro jactu se-
cundo $\frac{ar}{s}$; & n casus quibus illud amittit, h. e. quibus acquirit $\frac{-ar}{s}$;

debetur etiam ipsi ex pecunia collusoris a secundi jactus

$\frac{m \cdot ar : s + n \cdot -ar : s}{m+n} \propto \frac{mar - nar}{m+n \cdot s} \propto$ (versis $m - n$ in t , & $m + n$ in v)

$\frac{art}{sv}$: & collusori vicissim ex pecunia œconomi $\frac{-art}{sv}$, id est, pro-
pter signum $-$ debeat ille huic tantundem. Similiter ob eosdem
 m & n casus primi jactus, quibus œconomia pro jactu sequenti vel
confirmatur œconomus, vel ab ipso aufertur, fiet per modo ostensa
ipsius jus in pecuniam a tertii jactus, ceu à secundo secundi,

$\frac{m \cdot art : sv + n \cdot -art : sv}{m+n} \propto \frac{m \cdot -n \cdot art}{m+n \cdot sv} \propto \frac{artt}{svv}$, & collusoris vicis-

sim $\frac{-artt}{svv}$. Atque sic porro eadem ratione invenitur deberi œco-
nomo de pecunia jactus 4^{ti}, ceu à secundo tertii,

$\frac{m \cdot artt : svv + n \cdot -artt : svv}{m+n} \propto \frac{art3}{sv3}$, & de pecunia jactus 5^{ti}

$\frac{art4}{sv4}$ &c. collusori verò $\frac{-art3}{sv3}$, $\frac{-art4}{sv4}$ &c. & sic deinceps, quo-
usque fuerit opus. Collectis igitur in unam summam portionibus,
quæ œconomus pro singulis successivè jactibus debentur, fiet ejus ex-
pectatio

peſtatio totalis $\frac{ar}{s} + \frac{art}{sv} + \frac{artt}{svv} + \frac{art^3}{sv^3} + \frac{art^4}{sv^4} \&c.$ expreſſa vid.

per ſeriem quantitatum geometricè progredientium in ratione v ad t , eo uſque continuandam, donec numerus terminorum æquetur numero jactuum ſeu luſionum, de quo initio inter Aleatores convenit, aut quem alias ante diſceſſum eorum abſolvi poſſe præſumitur. Hunc

numerum ſi vocemus z , erit ultimus ſeriei terminus $\frac{art z^{-1}}{sv z^{-1}}$, &

ſumma totius ſeriei $\frac{ar}{s}$ in $\frac{v-t z: v z^{-1}}{v-t} \propto \frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n-t z: v z^{-1}}{2n}$.

Coroll. 1. Si differentia inter m & n , adeoque ratio $\frac{t}{v}$ minuscula ſit, aut ſaltem numerus luſionum z majuſculus, pro ſumma inventa poterit ſcribi $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$ abſque ſenſibili exceſſu, evaneſcente vid. quantitate $\frac{t \cdot z}{v \cdot z^{-1}}$, quippe ad v & t eo ordine proportionali, quem indicat numerus luſionum z unitate auctus. Quare tum valor totius prærogativæ œconomi, ad $\frac{ar}{s}$, id quod ipſi pro ſolo primo ludo deberetur, ferè ſe habet, ut $m+n$ ad $2n$.

Cor. 2. Si tempore exiguo magnus luſionum numerus poſſit abſolvi, œconomus autem à ludendo deſiſtere, alterique cuidam ſuam prærogativam vendere velit, accipiet ab ipſo $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$: ſi verò in luſu pergere, & œconomiam tantùm cum ſtatu colluſoris permutare cupiat, dabit ipſi colluſor, qui in œconomi munus ſuccedit, duplum, nempe $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{n}$; ſimplum enim ipſi deberet, ſi nunc à ludo omninò ceſſare vellent; ac deinde ruruſ tantundem, ſi ludum redauſpicari, alterque ſibi œconomiam ſponte cedere cupe-
ret.

Cor. 3. Si ſit $m \propto p$, & $n \propto q$, valor $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{2n}$ con-
trahitur ad $\frac{a \cdot p - q}{2q}$, ejuſque duplum $\frac{ar}{s}$ in $\frac{m+n}{n}$ ad $\frac{a \cdot p - q}{q}$.

A a

P R O -

PROBLEMA XX.

*Æstimatio sortis in ludo chartarum, vulgò
Capriludium, das Boockspiel, dicto.*

Ufus hujus ludi frequens inter nostrates. Instituitur chartis lusoriis inter duos pluresve collutores, quorum unus, qui contra cæteros decertat, & œconomi fungitur munere (der den Boock hat) postquam folia miscuit, eorum systema in tot manipulos dispescit, quot una secum collutores adsunt; tum singuli horum singulos sibi manipulos admoto pretio mercantur, postremum œconomo relinquentes, qui tandem inversis manipulis ima eorum folia, præter quæ alia nulla considerantur, reteggit. Quo facto his, quorum folia dignitate superant folium œconomi, pendere tenetur œconomus tantum, quantum quisque aleæ exposuit; sed quibus folia cecidère humilioris vel etiam paris dignitatis cum folio œconomi, illi depositi sui jacturam patiuntur, cedente hoc contra in emolumentum victoris œconomi, qui suo præterea munere fungi pergit, quamdiu vel unicum collutorum devicerit, nec officio œconomi exiit, nisi ab omnibus omninò collutoribus fuerit superatus.

His positis & intellectis, si valor expectationis œconomi sit investigandus, determinandæ tantùm restant rationes $p; q, m: n$, hoc est, definiendum quot casibus vincere & quot perdere queat œconomus in quavis lusione; item quot casibus ille jus œconomi servare, quot amittere possit: cætera enim ex præced. Problemate repetuntur. Sit itaque numerus specierum, in quas divisum est chartarum systema, f ; & numerus dignitatum in quavis specie, g ; adeoque universus foliorum numerus fg . Unde

I. Si duo tantùm sunt manipuli; patet, ambo eorum folia ima toties variari posse, quot biniones in universis foliis fg continentur, nempe $\frac{fg \cdot fg - 1}{2}$. Horum binionum nonnulli ejusdem, alii differentium dignitatum chartis constant, quorum numerus seorsim sic initur: Quoniam uniuscujusque dignitatis folia f biniones recipiunt $\frac{f \cdot f - 1}{2}$, & dignitatum numerus est g ; idcirco numerus omnium bi-

nionum

nionum, qui folia exhibent isodynamia sive ejusdem dignitatis, est $\frac{fg \cdot f - 1}{2}$, quo subducto ab universis $\frac{fg \cdot fg - 1}{2}$, relinquitur $\frac{fg \cdot fg - f}{2}$

$\propto \frac{ffg \cdot g - 1}{2}$ numerus binionum, qui differentium dignitatum foliis

constant. Atqui cum ambo folia ima sunt isodynamia, utrumvis sibi eligat collusor, œconomus ex ludi præscripto non potest non vincere, id quod ipsi valet 1; sin verò diversis pollent dignitatibus, uterque æqualem habet ad vincendum & perdendum expectationem, quandoquidem collusor æquè facilè humilioris ac altioris dignitatis folium eligere potest, id quod utrivis valet $\frac{1}{2}$. Sunt igitur œconomus $\frac{fg \cdot f - 1}{2}$ casus ad 1, & $\frac{ffg \cdot g - 1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$, quod facit $\frac{fg + f - 2}{2fg - 2}$,

& relinquitur ejus collusori $\frac{fg - f}{2fg - 2}$: hoc verò per Annot. ad lit. I.

Prop. XI. part. 1. tantundem est, acsi haberet œconomus $fg + f - 2$ casus ad lucrandum, & $fg - f$ casus ad perdendum; quare constat esse $p \cdot q :: fg + f - 2 \cdot fg - f$. Et quoniam is præterea retinet pro ludo sequenti jus œconomi, quoties vincit; eoque excidit quoties perdit, patet etiam hinc esse $m \propto p$, & $n \propto q$.

Nota, si sit numerus specierum $f \propto 4$, fit $p \cdot q (:: m \cdot n) :: 2g + 1 \cdot 2g - 2$; quæ rursus posito numero dignitatum $g \propto 9$ reducitur ad $p \cdot q :: 19 \cdot 16$. Hinc sumto, quòd collusor pro singularibus lusionibus deponere soleat a , debetur œconomus per præced.

Probl. ejusque Coroll. 3. pro primo ludo $\frac{a^r}{s} \propto \frac{a \cdot p - q}{p + q} \propto \frac{3}{35} a$,

pro omnibus ludis $\frac{a \cdot p - q}{2q} \propto \frac{3}{32} a$, excessu non superante unam centies millionesimam partem ipsius a in ludis tantum 7. Si igitur œconomus à ludo cessare velit, tertio cuidam prærogativam suam vendere poterit pretio $\frac{3}{32} a$; at si ludum continuare, & jus tantum suum in collusorem transmittere malit, accipiet ab ipso duplum, nempe $\frac{1}{16} a$.

2. Si tres fiunt manipuli, totidemque unà cum œconomus sunt collusores, liquet, duorum quorumvis manipulorum folia infima tot rursus variationibus obnoxia fore, quot biniones in universo chartarum numero continentur, cum tertius manipulus considerari possit

acsi abesset, ejusque folia omnia cæteris manipulis adhuc essent permittita: quare œconomo tot erunt casus, quibus utrumvis suorum collusorum seorsim superet, aut superetur ab ipso, quot erant in hypothese duorum tantum manipulorum; hoc est, manebit, ut antea, $p. q.:: fg + f - 2. fg - f::$ (in casu $f \infty 4$) $2g + 1. 2g - 2$. Sed variat ratio m ad n , pro numero collusorum seu manipulorum, quorum quo plures sunt, hoc difficilius œconomum munere suo excidere permittunt. Pro tribus manipulis considero, eorum folia ima tot variationes subire posse, quot terniones recipiunt omnia folia $4g$ (sic pono pro fg , concisionis calculi ergò, & quòd præter quaternarium non alius species numerus sit in usu) nempe $\frac{4g \cdot 4g - 1 \cdot 4g - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty \frac{32g^3 - 24gg + 4g}{3}$.

Horum ternionum nonnulli ex tribus foliis ejusdem dignitatis, alii ex duobus ejusdem cum tertio diversæ dignitatis, alii denique ex trium differentium dignitatum foliis constant: nimirum, cum cujusq; dignitatis folia 4 , terniones admittant 4 , biniones 6 , & dignitatum numerus sit g , erit numerus omnium ternionum ejusdem dignitatis $4g$, & binionum $6g$, quorum rursus binionum quilibet secum assumere potest quodlibet ex reliquarum $g - 1$ dignitatum foliis $4g - 4$; quod efficit terniones $24gg - 24g$, quorum una medietas $12gg - 12g$ duobus foliis isodynamis tertium altioris, altera medietas tertium inferioris dignitatis folium adjunctum habet; unde subductis $4g$ & $24gg - 24g$ ex universo ternionum numero $\frac{32g^3 - 24gg + 4g}{3}$ remanent terniones

$\frac{32g^3 - 24gg + 4g}{3}$, qui omnes trium differentium dignitatum folia exhibent.

Jam autem si tribus manipulorum foliis infimis ejusdem dignitatis esse contigerit, œconomus ex ludi præscripto œconomi excidere nequit, utrumq; fors tulerit: neq; etiam, cum duobus ejusdem, tertium elevatioris dignitatis fuerit adjunctum; at si tertium hoc humilioris fuerit gradus, vel etiam omnia tria folia dignitatis gradu discrepent, œconomus uno casu jus suum amittere (si nempe infimi gradus folium sibi ceciderit,) duobus servare potest, quod ipsi valet $\frac{2}{3}$. Sunt igitur ipsi $4g$ casus ad 1 , & rursus $12gg - 12g$ casus ad 1 , nec non $12gg - 12g$ ad $\frac{2}{3}$, iterumq;

$\frac{32g^3 - 96gg + 64g}{3}$ ad $\frac{2}{3}$; id quod facit $\frac{16gg - 3g - 4}{24gg - 18g + 3}$, & relinquuntur ad complendam unitatem $\frac{8gg - 15g + 7}{24gg - 18g + 3}$; quod tantundem est, acsi diceretur habere $16gg - 3g - 4$ casus ad servandam, & $8gg - 15g + 7$ casus ad amittendam œconomiam; aded ut inventa sit ratio $m:n :: 16gg - 3g - 4. 8gg - 15g + 7.$

Nota, si g determinetur ad 9, erit $p:q \propto 19:16$, & $m:n \propto 253:104$. Unde posito, quod alter collusorum deposuerit a , & alter b , debetur œconomio per præced. Probl. ejusque Coroll. $\frac{a.p - q.m + n}{p + q.2n} \propto \frac{153}{1040} a$ respectu prioris, & $\frac{b.p - q.m + n}{p + q.2n} \propto \frac{153}{1040} b$ respectu posterioris collusoris; adeoque respectu utriusq; $\frac{153}{1040} a + b$, non excedente una centies millesimâ parte ipsius $a + b$ in ludis undecim. Quapropter œconomus quarto cuidam, qui in locum suum succedere cupiet, privilegium suum vendet pretio $\frac{153}{1040} a + b$; alterutri verò collusorum, quicum vices suas permutare volet, putà illi qui deposuit a , pretio $\frac{153}{1040} 2a + b$; nam deberetur ipsi primo per modo dicta $\frac{153}{1040} a + b$, si ludus nunc abrumperetur; ac deinde, si reassumeretur, adhuc $\frac{153}{1040} a$, quandoquidem cedendo alteri œconomiam ludi, se debitorem ejus pro hac summa constituit.

3. Si quatuor constituuntur manipuli, totidemque cum œconomio habentur collusores, tot rursus casus præstò sunt, quibus ille unumquemque suorum collusorum seorsim vincat aut vincatur ab ipso, quot erant in duabus præcedd. hypoth. quod idem etiam intellige de quovis manipulorum numero, cum certè bini ipsorum quivis considerari semper possint, acsi præter ipsos nulli adessent; unde eadem perpetuo manebit ratio $p:q \propto 2g + 1:2g - 2$. Sed alteram rationem $m:n$, quam numerus manipulorum auget, sic exploro: Considero, quod quatuor manipulorum folia ima, *I.* vel omnia possint esse isodynamia sive ejusdem dignitatis: *II.* vel tria ejusdem cum quarto aut altioris, *III.* aut humilioris dignitatis: *IV.* vel duo ejusdem, & reliqua duo pariter ejusdem, sed diversæ ab altera dignitatis: *V.* vel duo ejusdem cum reliquis duobus diversarum dignita-

tum, quarum rursus vel utraque possit esse eminentioris: VI. vel utraque ignobilioris: VII. vel una eminentioris, altera inferioris gradus: VIII. vel omni a deniq; quatuor folia differentium dignitatum.

Horum si Primum, Secundum, Quartum aut Quintum contingerit, œconomus ex ludi præscripto muneris sui jacturam facere nequit: si Tertium, VI, VII, vel VIII^{um} acciderit, uno tantum illud casu amittere (si vid. infimæ dignitatis folium sibi relinquatur) tribus casibus retinere potest; quod ipsi proin dat $\frac{3}{4}$. Sed primum horum evenire deprehendo casibus g ; Secundum casibus $8gg - 8g$; Tertium totidem: Quartum $18gg - 18g$; Quintum casibus $16g^3 - 48gg + 32g$; Sextum & Septimum totidem: Ultimum deniq; casibus $\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}gg - 64g$, existente numero omnium casuum, ceu summa quaternionum in foliis universis, $\frac{32}{3}g^4 - 16g^3 + \frac{22}{3}gg - g$; quæ omnia, ut verbis parcam, industrio Lectori probanda relinquo. Quocirca habebit œconomus, g plus $8gg - 8g$ plus $18gg - 18g$ plus $16g^3 - 48gg + 32g$ casus ad 1, & $8gg - 8g$ plus $16g^3 - 48gg + 32g$ plus iterum $16g^3 - 48gg + 32g$ plus $\frac{32}{3}g^4 - 64g^3 + \frac{352}{3}gg - 64g$ casus ad $\frac{3}{4}$; id quod ipsi parit $\frac{24g^3 - 24gg + 3}{32g^3 - 48gg + 22g - 3}$ expectationis ad retinendum munus œconomi; & deest ad complendam unitatem $\frac{8g^3 - 24gg + 22g - 6}{32g^3 - 48gg + 22g - 3}$ pro metu amittendi muneris; sic ut censenda sit ratio $m.n :: 24g^3 - 24gg + 3 . 8g^3 - 24gg + 22g - 6$.

Nota, quòd si g determinetur ad 9. fiet $p.q :: 19.16$, & $m.n :: 15555.4080 :: 61.16$. Sumto itaque, quòd unus collusorum deposuerit a , alter b & tertius c , debetur œconomus per præc. Probl. ejusque Coroll. $\frac{p - q.m + n}{p + q.2n} a + b + c \propto \frac{33}{160} a + b + c$, non una decies millesima parte ipsius $a + b + c$ minus in folis 15 ludis. Quocirca si quinto cuidam locum suum cedere velit œconomus, ipse à ludo cessaturus, venundabit illi privilegium œconomi pretio $\frac{33}{160} a + b + c$; at si, continuaturus ludum, cum collusorum quodam

quodam fortem suam commutare cupiat, accipiet ab ipso vel $\frac{33}{160}$
 $2a + b + c$, vel $\frac{33}{160} a + 2b + c$, vel $\frac{33}{160} a + b + 2c$, prout is de-
 posuerit vel a , vel b , vel c .

Atque haud absimiliter determinari poterit valor prærogativæ
 œconomi, si plures ponantur manipuli & collusores.

PROBLEMA XXI.

De Ludo Bassetæ (de la Bassette.)

Celebratissimus est hic ludus ob innumeras turbas & tragœdias,
 quas hinc inde, in Italia præsertim & Gallia, olim excitavit, ob quas
 etiam ex istis regionibus non multò post proscrip-tus & sub gravi pœ-
 na prohibitus fuit. Eo tempore, quo exercitium illius in aula Regis
 Galliarum maximè florebat, D. Salvator (*Sauveur*) Mathematicus
 Gallus & Seren. tum Delphini Præceptor expectationes ludentium
 calculo subjecit, brevique Tabularum quarundam synopsi compre-
 hensas in Parisiensi Erudit. Diario m. Febr. 1679 in lucem edidit;
 è quo Diario nos de natura & constitutione hujus ludi ea recensebi-
 mus, quæ ad examinandas Tabulas & eruendum quem Auctor sup-
 pressit calculum scitu necessaria videbuntur.

Postquam is, qui œconomi fungitur munere, completum char-
 tarum lusoriarum systemaprehendit & miscuit, singuli collusorum
 ante se in mensa exponunt folium cujuslibet dignitatis aliunde de-
 promptum unà cum arbitraria pecuniæ summa. Tum verò œcono-
 mus systemate suo, ut imum ejus folium pateat, inverso, factoque;
 ab eodem initio bina subinde folia successivè & ordine ad finem usque
 systematis tollit; quod dum exequitur, cujusvis foliorum paris seu
 bigæ folium anterius sive præcedens in œconomi, posterius & se-
 quens in collusoris commodum cedere censetur, ita nimirum, ut si
 anterius Regis verbi gratia imaginem habeat, œconomus auferat
 quicquid Regibus appositum est; si vero posterius, collusoribus vi-
 cissim pendere tantundem teneatur, quantum illi Regibus apposue-
 re. Et

re. Et haftenus quidem nullus præ altero quicquam prærogativæ habet: sed sequentes præterea leges notandæ:

1. Si ambo folia sunt isodynamica & ejusdem cum exposito dignitatis (quod *doublets* appellant, nos *gemella* vocabimus) quo casu lucri & damni deberet fieri compensatio, solus tamen lucratur œconomus, aufertque quod dignitatis illius foliis appositum est.

2. Cuilibet collusorum etiam in medio ludi integrum est, de novo quodlibet folium pretio mercari; quo pacto fieri potest, ut in chartis residuis vel unum tantum, vel 2, 3, aut omnia 4 illius dignitatis folia supersint; quod sortem ipsius notabiliter variat. Sed observandum, quòd biga illa, cujus alterutrum conspexerit folium, nullius censetur valoris ratione dignitatis quam mercatus est; & quidem, si posterius folium bigæ ejusmodi hæc dignitate vestitum comparet, non tantum ceu *præcox* (*trop jeune*) nihil acquirit collusori, sed & ludo finem imponit alterius folii optione redauspicando: sin autem dignitas illa prodeat in proximo folio bigæ sequentis, valoris saltem est *imminuti* (*c'est une face*) œconomoque non nisi bessem seu duos trientes depositi lucratur.

3. Anterius quoque folium primæ bigæ, cùm suspicio esse possit illud visum œconomus, valoris semper est *imminuti*, eumque non nisi ex besse victorem reddere potest.

4. Cùm unico folio ejus dignitatis, pro qua decertatur, supersite, foliis gemellis, in quibus prærogativa œconomi consistit, non possit esse locus, statutum est in favorem œconomi, ut postrema omnium charta, quæ alias collusori prodesse deberet, pro nulla haberetur.

Quibus ita præmissis, pergo exponere methodum, qua expectationes œconomi quàm promptissimè determinantur: Posito numero bigarum residuarum n , adeoque numero foliorum $2n$, & collusoris deposito x , ante omnia considero, quòd in unaquaq; biga vel neutrum, vel alterutrum, vel utrumq; folium possit esse expositæ dignitatis: si neutrum, liquet per hanc bigam nihil nec acquiri nec perdi œconomus: si alterutrum, constat, eadem facilitate utrumvis esse posse (cùm excipiendis reliquo aut reliquis illius dignitatis foliis eadem in

bigis

bigis sequentibus loca pateant:) ac totidem proinde casus esse, quibus vincat œconomus sive acquirat $+ 1$, & quibus perdat sive obtineat $- 1$: qui propterea quia se mutuò destruunt, magno quoque compendio insuper haberi possunt. Soli ergo restant expendendi casus, quibus contingere potest, ut folia alicujus bigæ sint gemella, id est, ut ambo sint illius dignitatis.

I. Equidem si unicum ejus dignitatis folium supersit, quo casu folia gemella esse non possunt, liquido patet, ratione cujusvis bigæ seorsim, si ultimam excipias, nullam esse posse prærogativam œconomi (vid. *Tab. 5.*). Quoniam tamen postrema charta, quæ collusori prodesse posset, per leg. 4. pro nulla habetur, fit ut ratione omnium semper uno casu amplius lucrari, quàm perdere possit œconomus; quod propter numerum foliorum 2^n ceu totidem casuum, quibus expositæ dignitatis folium subest, prærogativam œconomi in bigis universis facit $\frac{1}{2^n}$ (*Tab. 1.*). Rursus autem, si proxima biga sit valoris imminuti pro œconomis, ex universis 2^n casibus unus est, qui ipsum triente depositi privat, per leg. 3. quod decrementum prærogativæ ejus efficit $\frac{1 \cdot 1:3}{2^n} \propto \frac{1}{6n}$ (*Tab. 2.*). Hoc igitur ablato tum ex $\frac{1}{2^n}$, tum ex 0, relinquitur $\frac{1}{3n}$ & $-\frac{1}{6n}$, pro residuo lucro œconomi ratione universi ludi, aut damno ejus ratione solius bigæ quæ imminuti est valoris. (*Tab. 3 & 6.*).

II. Si duo expositæ dignitatis folia restent, tot illa variationibus ceu casibus obnoxia sunt, quot biniones in foliis 2^n continentur, nempe $\frac{2^n \cdot 2^n - 1}{2}$. Horum in singulis bigis unus, adeoque in universis n bigis, n casus existunt, qui foliis gemellis œconomis victoriam procurare possunt; unde in singulis lucrum illius efficitur $\frac{1}{2^n \cdot 2^n - 1:2} \propto \frac{1}{2^n n - n}$ (*Tab. 5.*), in universis $\frac{n}{2^n \cdot 2^n - 1:2} \propto \frac{1}{2^n - 1}$ (*Tab. 1.*). Quòd si alterutrum dignitatis illius folium primo statim loco primæ bigæ prodeat, adeoque valoris sit imminuti per leg. 3. alterum folium ad unumquemque ex reliquis $2^n - 1$

Bb

locis

locis indifferenter se habendo, totidem casus præbet, quibus lucrum œconomi triente minuitur, cujus proinde decrementum æstimatur

$$\frac{2n-1 \cdot 1:3}{2n \cdot 2n-1:2} \propto \frac{1}{3n} \text{ (Tab. 2.)}. \text{ Hoc ergo detracto tum ex } \frac{1}{2n-1},$$

tum ex $\frac{1}{2nn-n}$, remanet pro lucro residuo in ludo universo

$$\frac{n+1}{6nn-3n} \text{ (Tab. 3.)} \text{ \& pro damno in sola prima biga } \frac{-2n+4}{6nn-3n} \text{ (Tab. 6.)}.$$

III. Si tria optatæ dignitatis folia supersint, tot casuum varietates inducunt, quot terniones in foliis $2n$ locum habent, videl.

$$\frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \propto \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{6} \text{ Ex horum numero fo-}$$

liorum gemellorum casus elicio, considerando quòd, positis alicujus bigæ foliis ambobus laudatæ dignitatis, tertium iis suppar folium unumquemque ex reliquis $2n-2$ locis occupare possit, eoq; tot casus pro illa biga suppeditet: unde, cùm sumtis successivè pro n numero bigarum, 1, 2, 3, 4 &c. numeri horum casuum fiant 0, 2, 4, 6 &c. erunt foliorum gemellorum casus in omnibus n bigis, 0 + 2 + 4 + 6 + &c. usque ad $2n-2 \propto$ (propter progress. arithm.) $n \cdot n-1$. Quare lucrum œconomi in qualibet biga separa-

tim valet $\frac{2n-2}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2:6} \propto \frac{3}{2nn-n}$ (Tab. 5.), in omnibus

conjunctim $\frac{n \cdot n-1}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2:6} \propto \frac{3}{4n-2}$ (Tab. 1.). Quòd si unum

horum trium foliorum primo statim loco exeat, eoque sit valoris imminuti per leg. 3. reliqua duo toties locari possunt diversimodè,

quot biniones cætera $2n-1$ folia recipiunt, adeoque $\frac{2n-1 \cdot 2n-2}{2}$

casus suppeditant, quibus lucrum œconomi triente mulctatur; cujus

proin detrimentum fit $\frac{2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 1:6}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2:6} \propto \frac{1}{2n}$ (Tab. 2.). Hoc

igitur ablato partim ex $\frac{3}{4n-2}$, partim ex $\frac{3}{2nn-n}$, relinquitur il-

lic $\frac{n+1}{4nn-2n}$ (Tab. 3.) pro lucro residuo in bigis universis: isthic

$\frac{-2n+7}{4nn-2n}$ (Tab. 6.) pro damno in prima separatim.

IV. Si omnia 4 expositæ dignitatis folia chartis residuis adhuc immerfa lateant, tot casus in univcrsum fuggerunt, quot qua-

Tabellæ:

Numerus foliorum exposita dignitatis in chartis residuis:

I. II. III. IV.

1. *Lucrum œconomi in bigis residuis, cum omnes sunt valoris integri:*

$$\frac{1}{2n} \qquad \frac{1}{2n-1} \qquad \frac{3}{4n-2} \qquad \frac{4n-5}{4nn-8n+3}$$

2. *Si prima est valoris imminuti, fit decrementum lucri:*

$$\frac{1}{6n} \qquad \frac{1}{3n} \qquad \frac{1}{2n} \qquad \frac{2}{3n}$$

3. *Residuum lucri in bigis, quarum prima est valoris imminuti:*

$$\frac{1}{3n} \qquad \frac{n+1}{6nn-3n} \qquad \frac{n+1}{4nn-2n} \qquad \frac{4nn+n-6}{12n^3-24nn+9n}$$

4. *Lucrum œconomi in bigis residuis, initio facto ab illa qua nulla est:*

$$\frac{2}{6n-3} \qquad \frac{n}{6nn-9n+3} \qquad \frac{nn-2n^2}{4n^3-12nn+11n-3} \qquad \frac{4nn-7n-3}{12n^3-36nn+33n-9}$$

5. *Lucrum œconomi in qualibet biga valoris integri, citra respectum ad bigas sequentes:*

$$0 \qquad \frac{1}{2nn-n} \qquad \frac{3}{2nn-n} \qquad \frac{6}{2nn-n}$$

6. *Damnum œconomi in biga valoris imminuti, citra respectum ad lucrum, quod habet in sequentibus:*

$$-\frac{1}{6n} \qquad \frac{-2n+4}{6nn-3n} \qquad \frac{-2n+7}{4nn-2n} \qquad \frac{-4n+20}{6nn-3n}$$

terniones in chartis $2n$ continentur, nempe $\frac{2n \cdot 2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$\infty \frac{2n \cdot 2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3}{24}$. Et si duo illorum in eadem biga se se gemello amplexu excipiunt, reliqua duo toties ordinem variare possunt in cæteris $2n-2$ chartis, quot hæ biniones admittunt; unde pro

de pro illa biga foliorum gemellorum casus $\frac{2n-2 \cdot 2n-3}{2}$ emergunt. Et quoniam sumtis successivè pro n numero bigarum 1, 2, 3, 4, 5, &c. numeri casuum evadunt 0, 1, 6, 15, 28 &c. hinc gemellorum casus in omnibus n bigis collectivè accepti erunt $0 + 1 + 6 + 15 + 28 + \&c.$ usque ad $\frac{2n-2 \cdot 2n-3}{2}$, de cujus seriei summa nunc dispiciendum. Video autem, hanc variis modis elici posse:

1. *Mod.* Quia termini seriei secundas suas differentias æquales habent, erunt figuratorum analogi, quorum summa quo pacto inveniri possit, supra part. 2. in fin. cap. 3. ostensum.

2. *Mod.* Quoniam iidem etiam ex ipsa Trigonalium serie per saltum sunt excerpti, resolvatur Trigonalium series A à gemina cyphra incipiens in duas alias B & C, quarum illa nostra sit, & im-

A	B	C	D
0	0	0	0
0	1	3	2
1	6	10	4
3	15	21	6
6	28	36	8
10			
15			
21			
28			
36			

parium: hæc parium locorum terminos complectatur. Resolvatur itidem series C in duas B & D; sic erit $A \infty B + C \infty B + B + D \infty 2B + D$, adeoque $A - D \infty 2B$, & $B \infty \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}D$; & quia numerus terminorum seriei B (ut & C & D) per hypoth. est n , numerus termin. seriei A erit $2n$, ipsaque series A (per cap. 3. part. 2.) $\infty \frac{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, series verò D (ob arithm. progr.) $\infty n \cdot n-1$. Quare series proposita B ($\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}D$) $\infty \frac{n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n \cdot n-1}{2} \infty \frac{4n^3 - 9nn + 5n}{6}$.

3. *Mod.* Terminus seriei B indefinite sumtus per hypoth. est $\frac{2n-2 \cdot 2n-3}{2} \infty \frac{4nn-4n}{2} - 3n+3 \infty \frac{n \cdot n-1}{2} 4 - \frac{n-1}{1} 3$;

rota ergo series B æquatur quadruplo omnium $\frac{n \cdot n-1}{2}$, minus triplo omnium $n-1$: sed novimus ex cap. 3. part. 2. $\frac{n \cdot n-1}{2}$ esse numerum trigonalem, & $n-1$ lateralem; atque omn. $\frac{n \cdot n-1}{2} \infty$

$$\frac{n+1}{1 \cdot 2} \circ$$

$\frac{n+1 \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, & omn. $n-1 \propto \frac{n \cdot n-1}{2}$; quare fit series B $\propto \frac{4 \cdot n+1 \cdot n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{3 \cdot n \cdot n-1}{2} \propto \frac{4n^3 - 9nn + 5n}{6}$, ut antea.

Cum itaque ostensum sit, foliorum gemellorum casus in singulis bigis esse $\frac{2n-2 \cdot 2n-3}{2}$, in universis $\frac{4n^3-9nn+5n}{6}$; conclu-

dimus, lucrum œconomi spectatum in qualibet biga seorsim valere $\frac{2n-2 \cdot 2n-3:2}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3:24} \propto \frac{6}{2nn-n}$ (Tab. 5.): in omnibus con-

junctim $\frac{4n^3-9nn+5n:6}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3:24} \propto$ (divid. per $n \cdot n-1:6$ seu $\frac{nn-n}{6}$) $\frac{4n-5}{2n-1 \cdot 2n-3} \propto \frac{4n-5}{4nn-8n+3}$ (Tab. 1.).

Porro si unum 4 foliorum expositæ dignitatis in prima statim biga primo loco prodierit, valoris aded existens imminuti per leg. 3. reliqua tria toties ordinem variare possunt, quot terniones residua $2n-1$ folia admit-

tunt; unde nascuntur $\frac{2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ casus, quibus lucrum œconomi triente multandum est; cujus propterea decrementum cen-

setur $\frac{2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3 \cdot 1:18}{2n \cdot 2n-1 \cdot 2n-2 \cdot 2n-3:24} \propto \frac{2}{3n}$ (Tab. 2.). Hoc igitur de-

tracto ex inventis tum $\frac{4n-5^1}{4nn-8n+3}$, tum $\frac{6}{2nn-n}$, remanet ex

una parte $\frac{4nn+n-6}{12n^3-24nn+9n}$ (Tab. 3.) pro lucro residuo in bigis

universis, ex altera $\frac{-4n+20}{6nn-3n}$ (Tab. 6.) pro damno ejus in prima

separatim.

Atque ita sex Tabularum, quas dedit Auctor Gallus, quinque jam complevimus; superest unica restituenda, nempe 4^{ta}, quæ lucrum œconomi continet in bigis residuis, quando prima earum ob conspectum antierius ejus folium nulla est. Hæc verò ex iis, quæ IV. præcedd. articulis jam præmonstrata sunt, facillimè concinnabitur; modò ad hæc duo attendatur:

I. Quòd bigæ, cujus antierius folium conspectum fuerit, posterius aut erit expositæ dignitatis, aut non erit: si erit, nihil œconomo vel nocet vel prodest, sed velut præcox ludo prorsus finem

imponit per leg. 2, si non erit, idem præcisè casuum numerus superest œconomo ad obtinendum depositum, seu ex asse seu ex besse, qui præstò esset, si biga illa quæ nulla est planè abesset; hac sola cum differentia, quòd numerus bigarum residuarum, qui alias diceretur n , ob alteram quæ nulla est una computatam nunc est tantùm $n - 1$.

2. Quòd viso primo folio primæ bigæ, supersunt tantùm $2n - 1$ folia non visa, adeò ut numerus omnium omninò casuum ex multitudine combinationum non omnium $2n$, sed tantùm $2n - 1$ foliorum æstimari debeat. His enim perpensis facilè perspicitur ratio sequentis operationis:

Exscribantur ex præcedd. IV. §. fractiones Tabulæ primæ & 2^{dæ}, sed quales erant ante reductionem, ita:

1. *Lucrum œconomi in bigis residuis, cùm omnes sunt valoris integri:*

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{n}{2n \cdot 2n - 1 : 2} \cdot \frac{n \cdot n - 1}{2n \cdot 2n - 1 \cdot 2n - 2 : 6} \cdot \frac{4n^3 - 9nn + 5n : 6}{2n \cdot 2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 : 24}$$

2. *Decrementum lucri, cùm prima est valoris imminuti:*

$$\frac{1 : 3}{2n} \cdot \frac{2n - 1 : 3}{2n \cdot 2n - 1 : 2} \cdot \frac{2n - 1 \cdot 2n - 2 : 6}{2n \cdot 2n - 1 \cdot 2n - 2 : 6} \cdot \frac{2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 : 18}{2n \cdot 2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 : 24}$$

Jam singulæ hæ fractiones mutantur in alias, surrogando tantùm ubique loco n in numeratoribus $n - 1$ & loco $2n$ in denominatoribus $2n - 1$; ut fiat

1. *Lucrum œconomi &c.*

$$\frac{1}{2n - 1} \cdot \frac{n - 1}{2n - 1 \cdot 2n - 2 : 2} \cdot \frac{n - 1 \cdot n - 2}{2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 : 6} \cdot \frac{4n^3 - 21nn + 35n - 18 : 6}{2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 \cdot 2n - 4 : 24}$$

2. *Decrementum lucri &c.*

$$\frac{1 : 3}{2n - 1} \cdot \frac{2n - 3 : 3}{2n - 1 \cdot 2n - 2 : 2} \cdot \frac{2n - 3 \cdot 2n - 4 : 6}{2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 : 6} \cdot \frac{2n - 3 \cdot 2n - 4 \cdot 2n - 5 : 18}{2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 \cdot 2n - 4 : 24}$$

Decrementis enim his respectivè ex lucro detractis, relinquuntur pro Tabula 4^{ta} fractiones:

$$\frac{2 : 3}{2n - 1} \cdot \frac{n : 3}{2n - 1 \cdot 2n - 2 : 2} \cdot \frac{n \cdot n - 2 : 3}{2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 : 6} \cdot \frac{4n^3 - 15nn + 11n + 6 : 18}{2n - 1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 3 \cdot 2n - 4 : 24}$$

seu facta reductione:

$$\frac{2}{6n}$$

$$\frac{2}{6n-3} \cdot \frac{n}{6nn-9n+3} \cdot \frac{nn-2n}{4n^3-12nn+11n-3} \cdot \frac{4nn-7n-3}{12n^3-36nn+33n-9}$$

Et sic quartam quoque Tabulam adornavimus. Quòd si quis D. ni Salvatoris Tabellas cum hisce nostris contulerit, deprehendet illas in quibusdam locis, præsertim ultimis, nonnihil emendationis indigere. Quæ vero ibidem observata adjiciuntur de proportione augmenti vel decrementi prærogativæ œconomi, prout numerus foliorum augetur minuiturve, de his & aliis dicere nil attinet, cum ex inspectione Tabularum cuivis ultrò manifesta sint.

P R O B L E M A X X I I.

Est Aleæ quoddam genus, in qua numerus omnium casuum est a, numerus quorundam ex iis b, cæterorum a—b ∞ c. Titius singulos aleæ jactus singulis nummis redimit Cajo persolvendis; tum quoties unum b casuum jecerit, à Cajo vicissim accipiet m nummos, at quoties jecerit unum ex c casibus, nihil habebit: tamen si unum c casuum jecerit continuis n vicibus, Cajo ipsi omnes suos n nummos reddere obstrictus est. Queruntur sortes Titii & Caji?

Problema hoc in speciem satis impeditum nihil admodum difficile habet, si dextrè tractetur. Incipio à fine, ponendo Titium jam decoxisse $n - 1$ nummos, hoc est, jam $n - 1$ vicibus jecisse unum c casuum, & nunc in procinctu esse instituendi n jactum. Itaque vel unus b casuum ipsi eveniet, vel rursus unus c casuum: si prius, à Cajo accipiet m nummos, qualium ipse jam Cajo n persolvit

solvit; sic ut ipsi remaneat lucrum $m - n$ nummorum: si posterius, recuperabit ex pacto omnes suos n nummos, nihilque adeò vel lucri vel damni faciet; unde lucrum ejus censebitur $\frac{b \cdot m - n + c \cdot 0}{a}$

$$\infty \frac{m - n \cdot b}{a}$$

Pono deinde, ipsum lusisse $n - 2$ vicibus, totiesque jecisse unum c casuum, & nunc aggredi $n - 1$ jactum: consequetur à Cajo (si unum b casuum jecerit) m nummos, qualium illi jam $n - 1$ erogavit; adeoque pro lucro suo retinebit $m - n + 1$: si nunc denuò jecerit unum c casuum, perveniet in eum statum, qui in præced. hypoth.

obtinebat, habebitque $\frac{m - n \cdot b}{a}$; quare jam fors ejus fit,

$$\frac{b \cdot m - n + 1 + c \cdot m - n \cdot b : a}{a} \infty \frac{m - n + 1}{a} \frac{ab + m - n \cdot cb}{aa}$$

Fingo porrò, jecisse $n - 3$ vicibus unum c casuum, & nunc se accingere ad jactum $n - 2$; fiet, ut vel lucrum acquirat $m - n + 2$ nummorum, qui sibi, detractis quos Cajo successivè numeravit $n - 2$ nummis, remanent; si nempe unum b casuum jecerit: vel ut peringat in statum præcedentis hypoth. si pergat jacere unum c casuum; unde jam fors ejus resultat $\frac{b \cdot m - n + 2 + c \cdot \text{præc.}}{a} \infty$

$$\frac{m - n + 2}{a} \frac{aab + m - n + 1}{aa} \frac{acb + m - n \cdot ccb}{aa}$$

Suppono rursus, jecisse $n - 4$ vicibus unum c casuum, & jam-jam defuncturum $n - 3$ jactu: perinde liquet, ac antea, eum habere b casus ad obtinendum lucrum $m - n + 3$ nummorum, qui sibi, ablati quos Cajo jam pendit $n - 3$ nummis, relinquuntur; & c casus ad perveniendum in statum præced. id quod sortem ipsi nunc parit $\frac{b \cdot m - n + 3 + c \cdot \text{præc.}}{a} \infty$

$$\frac{m - n + 3}{a} \frac{a^3 b + m - n + 2}{aa} \frac{aacb + m - n + 1}{aaa} \frac{accb + m - n \cdot c^3 b}{aaa}$$

Atque sic porrò retrogredi conveniret, ponendo Titium $n - 5$, $n - 6$ &c. jactus instituisse, si opus esset pergere ulterius; id verò non est necesse, cum ex allatis ratio progressionis jam satis pateat: colli-

colligimus enim facile, quod fors quam ab initio ludi habet, priusquam jacere inchoat, futura sit:

$$\frac{m-1 a^{n-1} b + m-2 a^{n-2} c b + m-3 a^{n-3} c c b + m-4 a^{n-4} c^3 b + \dots + m-n c^{n-1} b}{a^n} \infty$$

(factâ separatione terminorum diversis signis affectorum)

$$+ m b \text{ in } \frac{1}{a} + \frac{c}{a a} + \frac{c c}{a^3} + \frac{c^3}{a^4} + \frac{c^4}{a^5} \dots + \frac{c^{n-1}}{a^n}$$

$$- b \text{ in } \frac{1}{a} + \frac{2c}{a a} + \frac{3cc}{a^3} + \frac{4c^3}{a^4} + \frac{5c^4}{a^5} \dots + \frac{nc^{n-1}}{a^n}$$

quam quantitatem liquet duabus constare partibus, priore affirmata, posteriore negata, quarumque illa in serie geometricè progressionaliū, hæc in serie ex geometricè & arithmeticè progressionalibus mixta consistit: Utriusque summa per notas regulas habetur: illius

$\frac{m \cdot a^n - c^n}{a^n}$, hujus $\frac{a^n - c^n}{a^{n-1} b} - \frac{nc^n}{a^n}$; quarum proinde differentia quæ-

situm exprimit, lucrum vid. respectu Titii, & damnum respectu Caji, si pars affirmata præpolleat negatæ; damnum verò ex parte Titii & lucrum ex parte Caji, si hæc prævaleat illi.

Unde jam porrò sequitur quòd si ponatur æqualitas inter utramque, determinari possit, quis valor statui debeat literæ *m* vel *n*,

ut sortes Caji & Titii æquentur: Facta enim æquatione $\frac{m \cdot a^n - c^n}{a^n} \infty$

$\frac{a^n - c^n}{a^{n-1} b} - \frac{nc^n}{a^n}$, instituaturs divisio per $\frac{a^n - c^n}{a^n}$, & prodibit $m \infty$

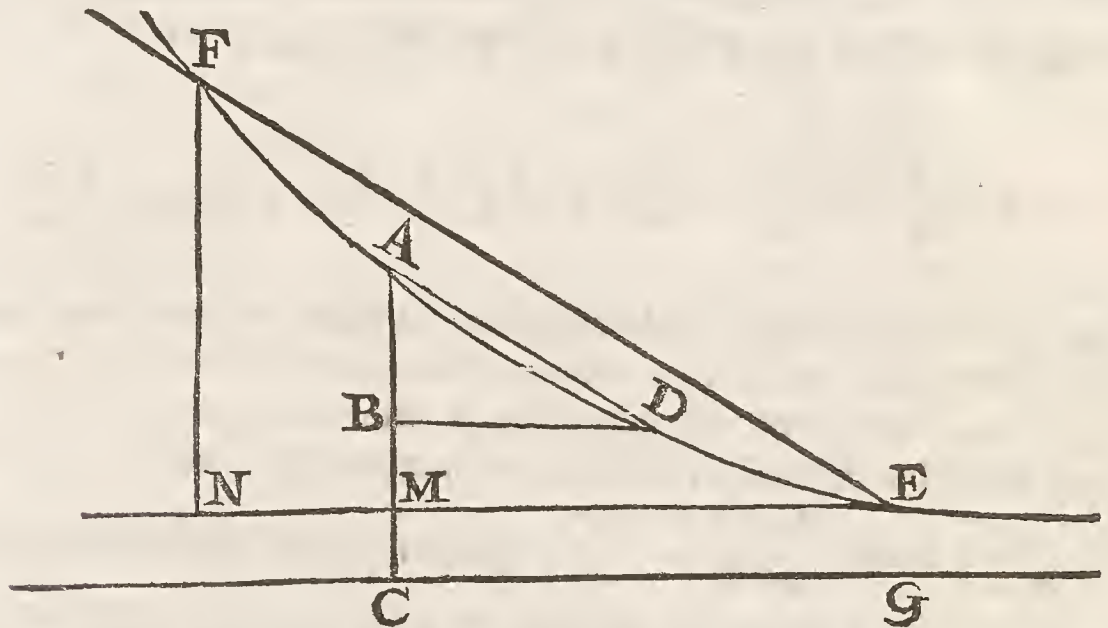
$\frac{a}{b} - \frac{nc^n}{a^n - c^n}$. Si verò data *m*, quæraturs *n*: ordinetur æquatio ita,

C c

$$\frac{nc^n}{a^n - c^n}$$

124

$\frac{nc^n}{a^n - c^n} \propto \frac{a}{b} - m$, ac fiat $a^n - c^n : c^n :: n \cdot \frac{a}{b} - m :: bn \cdot a - bm$, & componendo $a^n \cdot c^n :: a - bm + bn \cdot a - bm$; eruntque aggregata ex logarithmis extremorum & mediorum æqualia, nimirum $nla + la - bm \propto nlc + la - bm + bn$, h. e. $nla - nlc \propto la - bm + bn - la - bm$, & $n \propto \frac{la - bm + bn - la - bm}{la - lc}$, seu (posito $b \propto 1$) $n \propto \frac{la - m + n - la - m}{la - lc}$; quod per Logarithmicam ita facile construo:



In quacunq;ue Logarithmica $F A D E$ secetur applicata quælibet $A C$ in B , ut $A B$ sit ad $B C$ in ratione b ad c , sumptaque $A B$ loco unitatis, in eadem $A C$ abscindatur $A M \propto m$, per B & M agantur rectæ $B D$, $M E$, parallelæ axi $C G$, & occurrentes curvæ in D & E ; junctæque $A D$ ducatur parallela $E F$ secans curvam in F , ac denique ex F demittatur applicata $F N$ occurrens productæ $E M$ in N ; erit $F N$ valor optati numeri n .

Proponatur in exemplum hæc Alea: Titius duabus tesseris duos senarios jacere contendit, nummoque in jactum persoluto postulat à Cajo, ut sibi vicissim sex nummi numerentur, si id præstiterit; si secus faxit, nihil; attamen si vicies continuò scopo aberrarit, ut sibi omnes sui 20 nummi restituantur. Hic propter 36 casus duarum tesserarum, interque hos unicum qui duos senarios advehat, literarum

rum valor est, $a \propto 36$, $b \propto 1$, adeoque $c \propto 35$; nec non $m \propto 6$, & $n \propto 20$. Nunc autem per logarithmos compendiosè invenitur

vicesima potestas ipsius $\frac{c}{a}$, seu $\frac{c^n}{a^n} \propto \frac{5693}{10000}$; proinde $\frac{m \cdot a^n - c^n}{a^n}$

$\propto m, I - \frac{c^n}{a^n} \propto 6 \cdot \frac{4307}{10000} \propto \frac{25842}{10000}$; & pari modo altera pars $\frac{a^n - c^n}{a^n - 1b}$

$-\frac{ncn}{a^n} \propto \frac{a}{b} - \frac{a}{b} - n \frac{c^n}{a^n} \propto 36 - \frac{56 \cdot 5693}{10000} \propto 36 - \frac{318808}{10000} \propto \frac{41192}{10000}$;

quæ cum priorem excedat tota quantitate $\frac{15350}{10000} \propto \frac{307}{200}$, paulò ad-

huc majore quàm $\frac{3}{2}$, innuit, Titium non sine detrimento hanc aleam subire posse, & satius facturum si exemptionem statim à ludendi necessitate vel sesquinummo redimat. Quòd si tamen vel m augetur, vel minueretur n , posset alea sic attemperari, ut neuter præ altero quicquam prærogativæ haberet; nam si retento $n \propto 20$ fiat $m \propto 9 \frac{2429}{4307}$, aut manente $m \propto 6$ statuatur $n \propto 11$ aut 12 , utriusque fors propemodùm ad æqualitatem redacta erit.

Observo generaliter in hujusmodi alea sequentia:

1. Quòd si datis a, b, c & m , litera n successivè induit valores numerorum $1, 2, 3, 4$ &c. lucrum Titii (utpote cujus fors in casu $n \propto 1$ semper est potior forte Caji) aliquousque subinde crescit.

2. Quòd ejus conditio optima sit, cum ponitur $n \propto m - 1$ vel m ; & quidem perpetuò eadem in utraque hypothesi.

3. Quòd crescente n ulterius, decrescat illa porrò continuò in infinitum, usque eò ut & lucrum sæpè in damnum abeat, prævalente deinceps forte Caji.

4. Quòd lucrum vel damnum obtinens in hypothesi numeri n valdè magni & velut infiniti, ad illud quod obtinet respectu unici jactus (rejecta illa postrema conditione de restituendis Titio suis nummis, si continuis n jactibus nullus b casuum evenerit), rationem semper habet, ut a ad b , majoris ad minus; nimirum cum istud per

Cor. 6. Prop. III. part. I. fiat $\frac{b \cdot m \cdot 1 + c \cdot -1}{a} \propto \frac{bm - b - c}{a} \propto \frac{bm - a}{a}$,

Cc 2

erit

erit illud $\frac{bm-a}{b}$; & quidem utrumque simul vel lucrum ratione Tritii & damnum ratione Caji, vel vicissim, prout bm majus minusve ponitur ipso a .

PROBLEMA XXIII.

De Alea Tesserarum cæcarum (*blinde Würffel.*)

Sic vocant sex illas Tesseras, circulatoribus plerunque nostris solennes, quæ cum sint cubiformes ut ordinariæ, exoculatæ tamen velut apparent, & singulæ in una duntaxat hedra punctis notatæ, una scil. unico, alia duobus, tertia tribus, usque ad sextam, quæ unam hedrarum sex punctis signatam habet; sic ut universis non nisi $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \infty 21$ puncta inveniantur. Ejusmodi Tesseræ impostores emuncturi plebeculam in foro exponunt una cum præmiis secundum omnes punctorum numeros ab 1 usque ad 21, quanta circiter subjunctæ Tabulæ inserta videntur. Tum qui fortunam suam periclitari voluerit, nummo circulatori persoluto tesseræ istas in alveum projicit, & si quem punctorum jecerit numerum, huic assignatum præmium aufert; si verò nullum sibi punctum ceciderit, nummi sui jacturam facit.

His positis, qui sortem horum Aleatorum investigare cupit, notare debet sequentia:

1. Quòd numerus omnium casuum in sex ejusmodi tesseris, non secus atque in tesseris ordinariis, per ea quæ part. 1. post Propos. IX. ostensa sunt, sit 46656, quanta nim. est sexta potestas senarii.

2. Quòd numerus eorum casuum, qui nullum omnino punctum advehunt, determinetur per sextam potestatem quinarium, quæ est 15625; quoniam in quavis tessera quinque sunt hedræ punctis orbatae, quarum quælibet cum qualibet quinque hedrarum alterius tesseræ combinari, & harum combinationum quælibet rursus cuilibet

bet 5

bet 5 hedrarum tertiæ adjungi potest; ita ut præcedentium casuum numerus accessione novæ tesserae semper quintuplicetur.

3. Quòd quivis punctorum numerus vel ab una, vel à duabus pluribusve tesseriis efficiatur: si ab una efficitur, in cæteris quinque tesseriis nullum comparebit punctum; quare cùm singularum etiam quinque sint hedrae punctis destitutæ, numerus casuum, quibus id accidit, designabitur per 3125 quintam potestatem quinarium: si numerus punctorum à duabus producitur tesseriis, in cæteris quatuor nulla eminebunt puncta; unde nunc propter eandem rationem numerus casuum, quibus id fit, erit 625 quarta potestas quinarium. Et pariter, si à tribus, 4 aut 5 tesseriis constituitur, in cæteris tribus, duabus aut una tesseriis puncta deficient; unde tum numeri casuum erunt 125, 25, aut 5, id est, 3^{tia}, 2^{da} aut prima potestas quinarium.

4. Quòd idem punctorum numerus non tantùm à pluribus & paucioribus plerunque tesseriis, sed & ab eodem tesserarum numero pluribus quandoque modis produci potest: sic puncta XII tribus modis produci possunt à tribus, & duobus modis à 4 tesseriis; nam trium tesserarum puncta poterunt esse vel 1, 5, 6; vel 2, 4, 6; vel 3, 4, 5; & quatuor tesserarum puncta vel 1, 2, 3, 6; vel 1, 2, 4, 5.

Ut verò nulli modorum prætereantur, quibus componi possunt punctorum numeri, eadem ferè, quam supra in Probl. XVII. adhibuimus, methodo utemur. Scriptis ordine punctorum numeris ab I usque ad XXI, sumo omnes combinationes sex primarum notarum numeralium tum singularum 1, 2, 3, 4, 5, 6; tum binarum 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4, &c. item 2 + 3, 2 + 4, &c. 3 + 4, &c. &c. tum ternarum 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 4, &c. quaternarum, quinarum, & tandem senarum 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6, ponendo confestim singulas ad latus ejus numeri, quem summa combinatorum notarum efficit: sic quia biniones 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4 &c. efficiunt 3, 4, 5 &c. scribo illos ad latus punctorum III, IV, V &c. atque ita in cæteris omnibus. Hoc peracto casuum numeros, qui singulis punctorum numeris respondent, facillimè determino, numerando solummodo pro unoquoque modorum, quo illi producuntur ab una tessera 3125; pro unoquoque quo producuntur à tesseriis duabus, 625;

4

Expon:	Potes:	
1	5	6
2	25	36
3	125	216
4	625	1296
5	3125	7776
6	15625	46656

& quo à tribus, 4 aut 5 tesseriis, 125, 25 aut 5; ut supra in observat. 3. dictum: sic quia puncta XII tribus modis à tribus, & 2 modis à 4 tesseriis componi ostensum est, numerus casuum, quibus XII puncta eveniunt, erit ter 125 + bis 25 ∞ 425, quem in adjuncta Tabula adscribo. Quod si ubique similiter operatus fuero, & numeri omnium casuum in summam collecti constituent 46656 sextam potestatem senarii, certus ero me nullum modorum præteriisse.

Absoluta autem hacce Tabula summa rei peracta est, nec superest aliud, quam ut singuli casuum numeri in sua respectivè præmia ducantur, & productorum aggregatum per 46656 dividatur ad obtinendam optatam Aleatoris sortem, quæ hac ratione fiet

$$\frac{15625 \cdot 0 + 26125 \cdot 1 + 4400 \cdot 2 + 435 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 5 \cdot 12 + 5 \cdot 45 + 1 \cdot 90}{46656}$$

∞ $\frac{36875}{46656}$; ita ut tantum ipsi deponendum fuisset $\frac{36875}{46656}$ unius nummi, si æqua forte ludere voluisset; quare cum circulatori penderit integrum; reliquum nummi $\frac{9781}{46656}$ in ejus damnum & contra deceptoris lucrum computatur.

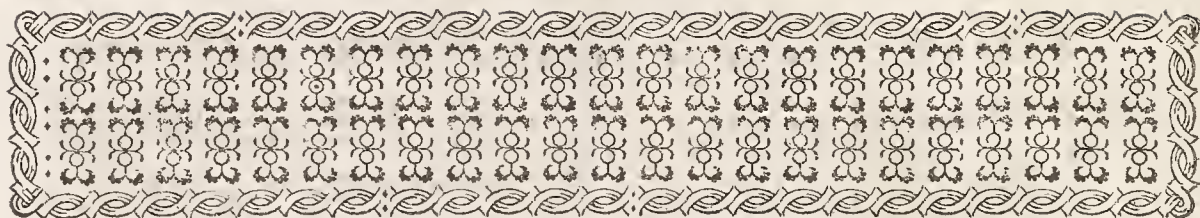
P R O -

127

PROBLEMA XXIV.

Positis & repetitis, quæ in præcedenti, si Dominus Aleæ ita paciscatur cum collusore, ut ille obstrictus velit esse ad restituendum huic omnes suos nummos, si quinque continuis jactibus nullum ipsi punctum ceciderit. Quæritur nunc utriusque fors?

Vidi quondam Circulatorem, qui adstantes ut inescaret, hanc insuper conditionem iis offerebat, eoque tum ansam mihi dedit cogitandi primùm de Problemate supra proposito XXII. Hujus itaq; solutio cum ibid. generaliter exhibita sit, nihil nobis hîc pensi restat, quam ut illam literis ad numeros revocatis huc applicemus: Constat ex præced. numerum omnium casuum in sex cæcis tesseris esse 46656, numerum eorum quibus nullum emicat punctum 15625, cæterorum 31031; unde valores literarum in re præsentis sunt, $a \propto 46656$, $b \propto 31031$, $c \propto 15625$; nec non per hypoth. $n \propto 5$; & valor ipsius m , qui varius est, per Cor. 3. Prop. III. part. 1. ad medium reductus fit $\propto \frac{36875}{31031}$, quandoquidem 31031 casus ad $\frac{36875}{31031}$, & 15625 casus ad 0, eandem collusori expectationem $\frac{36875}{46656}$ pariunt, quam habere deprehensus est in præcedenti. En tibi jam calculum:



ARTIS CONJECTANDI PARS QUARTA,

tradens

Usum & applicationem præcedentis Doctrinæ in Civilibus, Moralibus & Oeconomicis.

CAPUT I.

Preliminaria quaedam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate & Contingentia Rerum.



*C*ertitudo rei cujusvis spectatur vel *objective* & in se; nec aliud significat, quàm ipsam veritatem existentiae aut futuritionis illius rei: vel *subjective* & in ordine ad nos; & consistit in mensura cognitionis nostræ circa hanc veritatem.

Omnia, quæ sub Sole sunt vel fiunt, præterita, præsentia sive futura, in se & *objective* summam semper certitudinem habent. De præsentibus & præteritis constat; quoniam eo ipso, quo sunt vel fuerunt, non possunt non esse vel fuisse: Nec de futuris ambigendum, quæ pariter etsi non fati aliujus inevitabili ne-

cessi-

cessitate, tamen ratione tum præscientiæ tum prædeterminationis divinæ non possunt non fore; nisi enim certò eveniant quæcunque futura sunt, non apparet, quo pacto summo Creatori omniscientiæ & omnipotentiae laus illibata constare queat. Quomodo autem hæc futuritionis certitudo cum contingentia aut libertate causarum secundarum consistere possit, de hoc disputent alii; nos à scopo nostro aliena nolumus tangere.

Certitudo rerum, spectata in ordine ad nos, non omnium eadem est, sed multipliciter variat secundum magis & minus. Illa de quibus revelatione, ratione, sensu, experientia, *ἀποψία* aut aliter ita constat, ut de eorum existentia vel futuritione nullo modo dubitare possimus, summa & absoluta certitudine gaudent. Cætera omnia imperfectiorem ejus mensuram in mentibus nostris obtinent, majorem minoremve, prout plures vel pauciores sunt probabilitates, quæ suadent rem aliquam esse, fore aut fuisse.

Probabilitas enim est gradus certitudinis, & ab hac differt ut pars à toto. Nimirum si certitudo integra & absoluta, quam litera *a* vel unitate 1 designamus, quinque verb. gr. probabilitatibus ceu partibus constare supponatur, quarum tres militent pro existentia aut futuritione alicujus eventus, reliquæ contra: eventus ille dicetur habere $\frac{3}{5} a$, seu $\frac{3}{5}$ certitudinis.

Illud igitur altero *probabilius* vocatur, quod majorem certitudinis partem habet; etsi in positivo *probabile* ex usu loquendi tantum dicatur id, cujus probabilitas semissem certitudinis notabiliter superat. Dico, *notabiliter*; nam quod semissem certitudinis circiter æquat, *dubium* vel anceps vocatur. Ita probabilius est, quod $\frac{1}{5}$ certitudinis habet, quàm quod $\frac{1}{10}$; etsi neutrum in positivo sit probabile.

Possibile est, quod vel tantillam certitudinis partem obtinet: *Impossibile*, quod nullam aut infinitè exiguam. Ita possibile est, quod habet $\frac{1}{20}$ aut $\frac{1}{30}$ certitudinis.

Moraliter certum est, cujus probabilitas ferè æquatur integræ certitudini, sic ut defectus sentiri non possit: *Moraliter impossibile* contra, quod tantum duntaxat probabilitatis habet, quantum moraliter certo ad omnimodam certitudinem deest. Ita si pro moraliter

certo habeatur, quod $\frac{999}{1000}$ certitudinis possidet, erit moraliter impossibile, quod ejus tantum habet $\frac{1}{1000}$.

Necessarium est, quod non potest non esse, fore aut fuisse; idque *necessitate vel physica*: quo pacto necessum est ignem urere, triangulum habere tres angulos æquales duobus rectis, plenilunium, quod Luna existente in nodis ingruit, esse eclipticum: vel *hypothetica*, qua unumquodq; dum est aut fuit, vel esse aut fuisse supponitur, non potest non esse aut fuisse; quo sensu necessum est Petrum scribere, quem scio ponoq; scribere: vel denique *necessitate pacti seu instituti*, quo pacto aleator, qui tessera senarium jecerit, necessario vincere dicitur, si prius inter lufores ita conventum fuerit, ut factu senarii victoria constet.

Contingens (tam liberum, quod ab arbitrio creaturæ rationalis: quàm fortuitum & casuale, quod à casu vel fortuna dependet) est id, quod posset non esse, fore aut fuisse; intellige potentia remota, non proxima: nec enim contingentia semper omnem necessitatem, etiam quoad causas secundas, excludit; quod exemplis declaro. Certissimum est, quòd data tesserae positione, velocitate & distantia ab alveo, eo momento quo manum projicientis deserit, tessera non potest aliter cadere, quàm uti revera cadit: item, quod data aëris constitutione præsentè, datisque ventorum, vaporum, nubium mole, situ, motu, directione, velocitate & mechanismi legibus, quibus hæc omnia in se invicem agunt, tempestas crastinæ diei non possit alia fore, quàm qualis reapse futura est; adeo ut hi effectus ex suis causis proximis non minus necessario, atque Eclipsium phænomena ex luminarium motu sequantur: & tamen usus obtinuit, ut solæ Eclipses necessariis, casus vero tesserae & tempestatis futuritio contingentibus annumerentur; cujus rei non alia ratio est, quàm quòd ea, quæ ad determinandos posteriores effectus ut data supponuntur, atque etiam in natura talia sunt, non satis tamen nobis sint cognita; nec si essent, satis ex cultum Geometriæ & Physicæ studium, ut ex datis effectus hi calculo subduci possint; quemadmodum ex perspectis Astronomiæ principiis supputari & prædici possunt Eclipses: quæ propterea & ipsæ, ante Astronomiam eo perfectionis promotam, non minus ac cætera duo inter futura contingentia referri opus habebant. Sequitur hinc, uni & uno tempore videri posse contingens, quod alii
(imo

(imò & eidem) alio tempore post cognititas ejus causas fit necessarium; adeo ut contingentia præcipuè etiam respiciat cognitionem nostram, in quantum nos nullam videmus repugnantiam in objecto ad non esse vel fore, etiamsi hic & nunc vi causæ proximæ sed nobis ignotæ necessario sit vel fiat.

Fortuna prospera, un Bonheur, ein Glück / & Fortuna adversa, un Malheur, ein Unglück dicitur, cum nobis bonum vel malum obtingit non quodvis, sed quod probabilius, aut saltem æquè probabiliter, poterat non obtigisse; eoque proinde melior vel pejor fortuna, quo minus probabile erat, bonum vel malum hoc eventurum. Sic insigniter fortunatus est ille, qui terram fodiendo thesaurum invenit; quoniam millies fodiendo ne semel hoc accidit. Si viginti desertores, quorum unus cæteris in exemplum suspendio necandus, alea de vita contenderint: propriè non fortunati dicuntur illi novendecim, qui benigniore sorte sunt usi, sed infortunatissimus ille vicesimus, cui fors atra cecidit. Ita nec fortunatus prædicandus amicus tuus, qui è prælio salvus evasit, in quo exigua præliantium pars occubuit; nisi fortassis ob excellentiam boni, quod in vitæ conservacione consistit, ita vocandum existimes.

C A P. II.

De Scientia & Conjectura. De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum. Axiomata quadam generalia huc pertinentia.

Ea quæ certa sunt & indubia, dicimur *scire* vel *intelligere*: cætera omnia *conjicere* tantum vel *opinari*.

Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque *Ars Conjectandi* sive *Stochastice* nobis definitur ars metiendi quàm fieri potest exactissimè probabilitates rerum, eo fine, ut in judiciis & actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, fatius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis Philosophi sapientia & Politici prudentia versatur.

Probabilitates æstimantur ex *numero* simul & *pondere argumentorum*, quæ quoquo modo probant vel indicant, rem aliquam esse, fore aut fuisse. Per *Pondus* autem intelligo vim probandi.

Argumenta ipsa sunt vel *intrinseca*, vulgò artificialia, desumpta ex locis topicis causæ, effectus, subjecti, adjuncti, signi aut alterius cujusvis circumstantiæ, quæ qualemcunque nexum cum re probanda habere videntur: vel *extrinseca* & inartificialia, petita ab autoritate & testimonio hominum. Exemplum esto: Titius occisus reperitur in viâ, Mævius commissi homicidii accusatur; Argumenta accusationis sunt, 1. quòd constet illum odio habuisse Titium (en argumentum à *causa*, potuit enim odium hoc ipsum impulisse ad occidendum). 2. quòd examinatus palluerit timideque responderit (en argumentum ab *effectu*; potest enim pallor & metus iste ex conscientia patrati criminis profluxisse). 3. quòd in ædibus Mævii repertus mucro sanguine tinctus (en *signum*). 4. quòd quo die occisus in via Titius, eodem illic transferit Mævius (en *circumstantiam* loci & temporis). 5. quòd denique Cajus deponat, pridie commissi homicidii Titio cum Mævio lites intercessisse (en *testimonium*).

Priusquam autem propius ad institutum accedamus, ostendendo, quomodo his argumentis conjecturarum in probabilitatibus metiendis uti conveniat, præmittere lubet generales quasdam Regulas seu Axiomata, quæ unicuique sanæ mentis homini simplex ratio dictare solet, & quæ in vitæ civilis usu à prudentioribus etiam perpetuò observantur.

1. *Conjecturis locus non esse debet in rebus, in quibus omnimodam certitudinem assequi licet.* Frustra proin esset Astronomus, qui ex eo quòd quotannis duas vel tres contingere novit Eclipses, de Plenilunio quodam augurari vellet, num sit eclipticum, necne; cùm veritatem rei certo calculo consequi possit. Ita si fur interrogatus responderit, se rem ablatam vendidisse Sempronio, ineptè ageret Judex, qui ex vultu tonoque loquentis, aut ex qualitate rei furto ablatae aliisve furti circumstantiis de probabilitate asserti conjicere vellet, quando præstò est Sempronius, è quo rem omnem certò & facilè experiri licebit.

2. *Non sufficit expendere unum alterumve argumentum, sed conquirenda*

quirenda sunt omnia, quæ in cognitionem nostram venire possunt, atq; ullo modo ad probationem rei facere videntur. Tres naves ex. gr. solvunt è portu, post aliquod tempus nunciatur, unam illarum naufragio periisse; conjicitur quænam? si solum numerum navium spectarem, infortunium singulis æquè accidere potuisse colligerem; sed quia memini, unam earum præ cæteris carie & vetustate fuisse exesam, velis & antennis malè armatam, nauclero quoque novitio & inexperto instructam, hanc utique probabilius quàm cæteras interiisse judico.

3. Nec tantùm illa sunt attendenda, quæ rei probanda conducunt; sed & omnia illa, quæ in contrarium adduci possunt, ut trutinatis probè utrisq; constet utra præponderent. De amico diutissimè à patria absente quæritur, an pro mortuo declarari possit? Pro affirmativa militant hæc argumenta: Quòd omni licet adhibita cura toto vicennio nihil de illo innotuit: quòd peregrinantes plurimis vitæ periculis expositi sunt, quibus exempti hi qui domi manent; fortè igitur in undis finiit vitam, fortè occisus in via, fortè in prælio, fortè morbo aut casu aliquo obiit in loco, ubi nemini fuit notus: quòd si in vivis esset, ejus jam ætatis esse deberet, quam pauci vel domi attingunt: quòd scripturus fuisset, etiamsi in extremis Indiæ oris versaretur, quia scivit se hæreditatem expectare domi: & quæ sunt alia. Quibus tamen argumentis non est acquiescendum, sed opponenda quoque sequentia, quæ negativam tuentur. Constat, hominem fuisse socordem, ægrè arripuisse calamum, amicos contempsisse; fortè à Barbaris captivus ductus, ut scribere non potuerit; fortè etiam scripsit ex India aliquoties, sed literæ vel incuria latorum vel naufragio periëre; constat denique, multos diutius emansisse, & tamen tandem rediisse incolumes.

4. Ad judicandum de universalibus sufficiunt argumenta remota & universalia; sed ad conjecturas formandas de individuis, propiora quoq; & specialia adjungenda sunt, si modo haberi possunt. Ita cùm quæritur in abstracto, quantò sit probabilius, juvenem viginti annorum seni sexagenario fore superstitem, quàm verò hunc illi, præter discrimen ætatis & annorum nihil est, quod considerare possis; sed ubi specialiter sermo est de individuis Petri juvenis & Pauli senis, attendere insuper oportet ad specialem eorum complexionem & studium, quo uterque
vale-

valetudinem suam curat; nam si Petrus sit valetudinarius, si affectibus indulgeat, si intemperanter vivat, fieri potest, ut Paulus, etsi ætate provector, optima tamen ratione longioris spem vitæ concipere valeat.

5. *In rebus incertis & dubiis actiones nostræ suspendendæ sunt, donec major lux affulserit; sed si occasio agendi nullam patiatur moram, inter duo semper eligendum id, quod convenientius, tutius, consultius aut probabilius videtur, etsi neutrum in positivo tale sit.* Sic in oborto incendio, è quo aliter elabi non possis, nisi vel ex summo tecto vel ex inferiore quadam contignatione te præcipitem des, præstabit posterius eligere, quia tutius; etsi neutrum simpliciter tutum sit, aut sine læsionis periculo fieri possit.

6. *Quod aliquo casu prodesse, nullo nocere potest, præferendum est illi, quod nullo vel prodest vel nocet; quorsum collimat illud, quod vernaculè dicimus: Hilfft es nicht / so schadt es nicht.* Fluit ex præcedenti; nam quod prodesse potest, cæteris paribus satius, tutius, optabilius est illo, quod non potest.

7. *De Actionum humanarum pretio non statuendum ex eventu; cum stolidissimæ actiones quandoque optimo, prudentissimæ contra pessimo successu fruuntur; hinc Poëta: Careat successibus, opto, quisquis ab eventu facta notanda putat.* Ita si quis tribus tessera prima vice tres senarios jacere suscipit, etiamsi fortasse vincat, stolidè tamen egisse censetur. Notandum contra perversa vulgi judicia, cui præstantior habetur, quò quisque est fortunatior; imò cui prosperum ac felix scelus plerunque virtus vocatur, de quo rursus eleganter Ovvenus:

Epigr. lib. sing. §. 216.

Quòd malè consultum cecidit feliciter, Ancus
Arguitur sapiens, qui modo stultus erat;
Quod prudenter erat provisum, si malè vortat,
Ipse Cato populo iudice stultus erit.

8. *In judiciis nostris cavendum, ne rebus plus tribuamus quàm par est, neque quod probabilius est cæteris, pro absolutè certo habeamus ipsi aut obtrudamus aliis.* Oportet enim, ut fides, quam rebus tribuimus, proportionata

tionata sit gradui certitudinis, quam unaquæque res obtinet atque adeo in eadem ratione minor, qua minor est ipsa rei probabilitas; quod vernaculè sic enunciamus; Man muß ein jedes in seinem Werth und Unwerth beruhen lassen.

9. *Quia tamen rarò admodum omnimodam certitudinem assequi licet, necessitas & usus volunt, ut quod moraliter tantùm certum est, pro absolute certo habeatur. Utile proin esset si Magistratus auctoritate morali certitudini determinati limites constituerentur; putà si definiretur, num ad illam efficiendam sufficiant $\frac{22}{1000}$, an requirantur $\frac{222}{1000}$ certitudinis; ne partium studio aliquid dare possit Judex, sed cynosuram habeat, quam in ferenda sententia constanter observet.*

Plura ejusmodi Axiomata alia unusquisque quotidiano rerum usu edoctus proprio Marte sibi cudere poterit, quorum omnium nos extra datam occasionem difficulter meminisse possemus.

C A P U T III.

De variis argumentorum generibus, & quomodo eorum pondera aestimentur ad supputandas rerum probabilitates.

Qui varia argumenta examinat, quibus opinio vel conjectura generatur, triplex in iis discrimen animadvertet: nam quædam eorum *necessariò existunt & contingenter indicant*: alia *contingenter existunt & necessariò indicant*: alia denique *contingenter existunt simul & indicant*. Discrimen declaro exemplis: Frater meus diu nihil ad me literarum dedit; dubito, an ejus segnities aut negotia in culpa sint; vereor etiam ne planè fato concesserit. Hic intermissæ scriptionis argumenta sunt tria: *Segnities, Mors & Negotia*; quorum primum existit necessariò, (necessitate hypothetica, quia fratrem scio ponoq; segnem esse) sed indicat contingenter; potuisset enim segnities hæc ipsum non cohibere à scribendo: secundum contingenter existit, (potest enim frater adhuc in vivis esse) at necessariò indicat, cùm mortuus

Ee

scribere

scribere non possit: tertium & contingenter existit & contingenter indicat; posset enim ille habere & non habere negotia, & si quæ habet, possunt tanta non esse, quæ ipsum de descriptione detineant. Aliud exemplum: Pono aleatorem, cui ex ludi præscripto præmium debeat, si tesseris duabus septem puncta jecerit, voloque conjicere, quam talis vincendi spem habeat. Hic argumentum victoriæ est jactus septenarii, qui illam indicat necessario, (necessitate nimirum pacti inter collutores initi) sed tantum existit contingenter; cum præter septenarium & alii punctorum numeri cadere possint.

Præter hanc argumentorum distinctionem aliud quoque in iis discrimen observare licet; dum quædam eorum sunt *pura*, alia *mixta*. *Pura* voco, quæ in quibusdam casibus ita rem probant, ut in aliis nihil positivè probent: *Mixta*, quæ ita rem probant in casibus nonnullis, ut in cæteris probent contrarium rei. Exemplum esto: Si in turba tumultuantium quidam gladio fuerit confossus, & testimonio hominum fide dignorum eminus adspectantium constet, huic nigram fuisse chlamydem qui facinus commisit, reperiaturque inter tumultuantes Gracchus cum tribus aliis ejus coloris tunicâ indutus; erit hæc tunica argumentum aliquod commissæ à Graccho cædis, sed mixtum; quoniam uno casu ejus culpam, tribus casibus ejus innocentiam probat, prout videl. vel ab ipso vel ab uno reliquorum trium cædes patrata fuerit; nec enim ab istis patrari potuit, quin eo ipso Gracchus ponatur innocens. Quod si verò in subsecuto examine Gracchus paluerit, pallor hic faciei est argumentum purum: probat enim Gracchi culpam, si à læsa conscientia proficiscatur; sed non vicissim probat ejus innocentiam, si aliunde proveniat; potest enim fieri, ut alia de causa palleat Gracchus, & tamen ipse sit auctor cædis.

Ex iis, quæ hætenus dicta sunt, perspicuum est, vim probandi, qua pollet quodlibet argumentum, pendere à multitudine casuum, quibus illud existere vel non existere, indicare vel non indicare, aut etiam contrarium rei indicare potest; adeoque gradum certitudinis seu probabilitatem, quam generat hoc argumentum, ex casibus istis per Doctrinam primæ Partis non aliter elici posse, quam sortes aleatorum in ludis aleæ investigari solent. Ad quod ostendendum sumamus numerum casuum, quibus contingere potest ut argumentum aliquod

liquod existat, esse b ; eorum, quibus fieri potest ut non existat, c ; amborum $a \propto b + c$; item numerum casuum, quibus contingere potest ut indicet, β ; ut non indicet, aut contrarium rei indicet, γ ; amborum $a \propto \beta + \gamma$. Pono autem, omnes casus æquè possibiles esse, seu pari facilitate evenire posse; alias enim moderatio est adhibenda, & pro quovis casu faciliori tot alii casus numerandi sunt, quoties is cæteris facilius evenit: ex. gr. pro casu triplo faciliori numero tres casus, qui pari cum cæteris facilitate contingere possint.

1. Itaque sit primò argumentum *contingenter existens & necessario indicans*: erunt ex modo positis b casus, quibus existere adeoque & indicare rem (seu 1) potest; & c casus, quibus potest non existere, adeoque nec quicquam indicare; id quod per Coroll. 1. Prop.

III. primæ Part. valet $\frac{b \cdot 1 + c \cdot 0}{a} \propto \frac{b}{a}$, ita ut tale argumentum probet $\frac{b}{a}$ rei seu certitudinis rei.

2. Sit deinde argumentum *necessario existens & contingenter indicans*: erunt ex hyp. β casus, quibus fieri potest ut indicet rem, & γ casus ut non indicet, seu ut contrarium indicet; quod vim argumenti ad rem probandam nunc efficit $\frac{\beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0}{a} \propto \frac{\beta}{a}$: probat ergò

hujusmodi argumentum $\frac{\beta}{a}$ certitudinis rei, atque insuper si sit mixtum (quod eodem modo patet) $\frac{\gamma \cdot 1 + \beta \cdot 0}{a} \propto \frac{\gamma}{a}$ certitudinis contrarii.

3. Si quod argumentum *contingenter existit & contingenter indicat*, pono statim existere, quo casu per modo ostensa probare censeatur $\frac{\beta}{a}$ rei, & insuper si sit mixtum, $\frac{\gamma}{a}$ contrarii: unde cum sint b casus, quibus existere; & c casus, quibus non existere, adeoque & nil probare possit; valebit hoc argumentum ad rem probandam

$\frac{b \cdot \beta + c \cdot 0}{a} \propto \frac{b \cdot \beta}{a a}$: & si sit mixtum, ad probandum contrarium

$\frac{b \cdot \gamma + c \cdot 0}{a} \propto \frac{b \cdot \gamma}{a a}$.

Ee 2

4. Porro

4. Porrò si plura concurrant argumenta ad ejusdem rei probationem, vocenturque

numeri casuum, argumenti	pr.	sec.	tert.	quart.	quint.	&c.
omnium	a	d	g	p	s	&c.
probantium	b	e	h	q	t	&c.
non-probantium						
aut probant. contr.	c	f	i	r	u	&c.

vis probandi ex omnium argumentorum concursu resultans sic æstimatur. Sint autem primò omnia argumenta *pura*; erit primi seorsim spectati pondus $\frac{b}{a} \propto \frac{a-c}{a}$ (vocando sic $\frac{\beta}{\alpha}$, si contingenter indicet; aut $\frac{b\beta}{a\alpha}$, si simul contingenter existat) ut vidimus. Accedat nunc alterum argumentum, quod *e* vel *d-f* casibus probat rem seu *i*, & *f* casibus nil probat, solumque adèd pondus primi argumenti, quod ostensum est esse $\frac{a-c}{a}$, efficax relinquit: valebit pondus ex utroq;

argumento conflatum $\frac{d-f \cdot 1 + f \cdot \frac{a-c}{a} : a}{d} \propto \frac{ad-cf}{ad} \propto 1 - \frac{cf}{ad}$ rei.

Jungatur & tertium; erunt *h* seu *g-i* casus, qui probant rem, & *i* casus, quibus nullum est argumentum, solaque duo priora vim suam probandi $\frac{ad-cf}{ad}$ retinent: unde vis omnium trium censetur

$\frac{g-i \cdot 1 + i \cdot \frac{ad-cf}{ad} : ad}{g} \propto \frac{adg-cfi}{adg} \propto 1 - \frac{cfi}{adg}$. Et ita deinceps,

si plura præstò sint argumenta. E quibus patet, quòd omnia junctim sumpta probabilitatem inducunt, quæ ab absoluta rei certitudine seu unitate deficiat parte unitatis, orta ex divisione producti casuum non probantium per productum casuum omnium in universis argumentis.

5. Sint deinde omnia argumenta *mixta*: Quoniam numerus casuum probantium primi argumenti est *b*, secundi *e*, tertii *h*, &c. & probantium contrarium *c*, *f*, *i*, &c. probabilitas rei ad probabilitatem contrarii, vi folius primi argumenti, se habet ut *b* ad *c*; & vi folius secundi, ut *e* ad *f*; & vi folius tertii, ut *h* ad *i*, &c. unde fat evidens est, quòd vis probandi totalis ex omnium argumentorum concursu resultans componatur ex viribus omnium argumentorum

parti-

particularium, i. e. quòd probabilitas rei ad probabilitatem contrarii se habeat in ratione beh &c. ad cfi &c. adeò ut probabilitas absoluta rei sit $\frac{beh}{beh + cfi}$, & probabilitas absoluta contrarii $\frac{cfi}{beh + cfi}$.

6. Sint rursus quædam argumenta *pura* (velut tria priora) & quædam *mixta* (ut duo reliqua). Considero primò sola pura, quæ per §. 4. probant $\frac{adg - cfi}{adg}$ certitudinis rei, defectu ad unitatem existente $\frac{cfi}{adg}$; sunt ergò velut $adg - cfi$ casus, quibus tria hæc argumenta junctim sumta probant rem seu 1; & cfi casus, quibus nil probant, solisque proin argumentis mixtis locum probandi concedunt: probant autem hæc duo per præced. §. 5, $\frac{qt}{qt + ru}$ rei, & $\frac{ru}{qt + ru}$ contrarii. Quare probabilitas rei ex omnibus argumentis resultans est $\frac{adg - cfi \cdot 1 + cfi \cdot qt : qt + ru}{adg} \propto \frac{adg qt + adgru - cfiru}{adg qt + adgru} \propto 1 - \frac{cfiru}{adg \cdot qt + ru}$, quæ ab omnimoda certitudine ceu unitate deficit producto partis $\frac{cfi}{adg}$ (qua ab eadem deficit probabilitas rei per §. 4. ex solis argumentis puris resultans) per $\frac{ru}{qt + ru}$ probabilitatem absolutam contrarii per præced. §. 5. ex argumentis mixtis elicitam.

7. Quòd si præter argumenta quæ rei probandæ conducunt, alia se offerunt argumenta pura, quibus contrarium suadetur, utriusque generis argumenta per præced. regulas seorsim ponderanda sunt, ut inde constare possit ratio, quæ inter probabilitatem rei & probabilitatem contrarii intercedit. Ubi notandum, si argumenta, quæ in utramque partem afferuntur sunt satis fortia, fieri posse, ut absoluta probabilitas utriusque partis semissem certitudinis notabiliter superet, h. e. ut utrumque contrariorum reddatur probabile, etsi relativè loquendo unum sit minus probabile altero; sic fieri potest, ut quidpiam habeat $\frac{2}{3}$ certitudinis, dum ejus contrarium possidet $\frac{3}{4}$; quo pacto utrumque contrariorum erit probabil, & tamen prius minus probabile suo contrario, idque in ratione $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, sive 8 ad 9.

Dissimulare hîc non possum, quòd in speciali applicatione ha-

Ee 3

rum

rum regularum multa occurrunt prævideo, quæ in causa esse queunt, ut turpiter sæpe quis hallucinetur, nisi in discernendis argumentis cautè procedat: quandoque enim distincta videri possunt argumenta, quæ reapse unum idemque argumentum constituunt; aut vice versa unum videntur, quæ distincta sunt; nonnunquam ponuntur in argumento talia, quæ argumentum contrarii planè evertunt; &c. In cujus rei illustrationem unum tantum alterumve exemplum adduco: Pono in supra allato exemplo Gracchi, homines hos fide dignos, qui tumultuantes viderunt, in Auctore cædis rufos insuper capillos observasse, talique capillitio Gracchum cum duobus aliis notari, sed quorum neuter nigra toga sit vestitus. Hic, si quis ex istis indiciis, quòd præter Gracchum tres sint atro colore vestiti, & præter eundem duo rufis capillis insignes, colligere vellet probabilitatem culpæ ad probabilitatem innocentiam in persona Gracchi per §. 5. se habere in ratione composita ex subtripla & subdupla, h. e. in ratione subsextupla, illumque adeo verisimilius multo innocentem esse, quam reum facinoris, is utique ineptè colligeret; cum hic propriè non adsint duo argumenta, sed unum tantum idemque à duabus simul circumstantiis coloris vestium & capillorum petitur, quæ duæ circumstantiæ cum in sola persona Gracchi junctim convenient, arguunt certò non alium quam ipsum auctorem cædis esse potuisse. Aliud exemplum esto: De Contractu quodam scripto dubium movetur, an dies instrumento appositus fraudulenter sit anticipatus? Argumentum pro negativa hoc esse potest, quòd instrumentum signatum sit manu Notarii, i. e. personæ publicæ & juratæ, quem non verisimile est quicquam commisisse fraudis, cum id sine summo honoris ac fortunæ suæ periculo facere non potuisset, ac propterea etiam inter 50 vix unus reperiatur, qui isthuc nequitiam procedere audeat. Argumenta vero pro affirmativa possunt esse, quòd Notarii hujus fama pessimè audiat, quòd ex fraude maximum expectare potuit lucrum, & præsertim quòd talia attestetur, quæ nihil probabilitatis habent, veluti si scripsisset, quendam alteri mutuo locasse 10000 aureos, eo tempore, quo ex omnium æstimatione vix centum in universis bonis habere poterat. Hic si argumentum à caractere ejus qui subscripsit petitur seorsim consideres, censere poteris probabi-

babilitatem authenticæ instrumenti velut $\frac{49}{50}$ certitudinis valere. Sin argumenta in contrarium expendas, agnoscere teneris fieri vix posse, quin instrumento falsum insit, adeoque fraudem in illo commissam moralem planè certitudinem, h. e. velut $\frac{222}{1000}$ certitudinis habere. Inde verò concludi non debet, probabilitatem authenticæ ad probabilitatem fraudis per §. 7. esse in ratione $\frac{49}{50}$ ad $\frac{222}{1000}$, hoc est, in ratione penè æqualitatis: dum enim Notarium pono diffamatae fidei, hoc ipso pono, eum non comprehendi in casu horum 49 proborum Notariorum, qui fraudes detestantur; sed esse ipsum illum quinquagesimum, qui sibi religioni non ducit, perfidè in officio suo versari: id quod vim omnem illius argumenti, quod alias authenticam instrumenti probare posset, prorsus tollit ac destruit.

C A P U T IV.

De duplici Modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta. Problema singulare eam in rem propositum. &c.

Ostensum est in Capite præced. quomodo ex numeris casuum, quibus rerum quarumvis argumenta existere vel non existere, indicare vel non indicare, aut etiam contrarium indicare possunt, ipsorum vires probandi iisque proportionatae rerum probabilitates calculo subduci & æstimari queant. Eò itaque deventum est, ut ad conjecturas de re qualibet ritè formandas aliud nil requiratur, quàm ut tum numeri horum casuum accuratè determinentur, tum & definiatur, quanto facilius alii aliis accidere possint. At hîc tandem nobis aqua hæere videtur, cum vix in paucissimis præstare hoc liceat, nec alibi ferè succedat. quàm in aleæ ludis, quos primi inventores ad æquitatem ipsis conciliandam data opera sic instituerunt, ut certi notique essent numeri casuum, ad quos sequi debet lucrum aut damnum, & ut casus hi omnes pari facilitate obtingere possent. In cæteris enim plerisque vel à naturæ operatione vel ab hominum arbitrio pendentibus effectis id neutiquam locum habet. Ita ex. gr.

noti

noti sunt numeri casuum in tesseris; in singulis enim tot manifestè sunt quot hedræ, iique omnes æquè proclives; cum propter similitudinem hedrarum & conforme tesserae pondus nulla sit ratio, cur una hedrarum pronior esset ad cadendum quàm altera, quemadmodum fieret, si hedræ dissimilis forent figuræ, aut tessera una in parte ex ponderosiore materia constaret quàm in altera. Sic itidem noti sunt numeri casuum ad educendam ex urna schedulam albam nigramve, & notum est omnes æquè possibiles esse; quia nimirum determinati notique sunt numeri schedularum utriusque generis, nullaque perspicitur ratio, cur hæc vel illa potius exire debeat quàm quælibet alia. At quis cedo mortalium unquam definiet numerum ex. gr. morbum, veluti totidem casuum, qui innumeras corporis humani partes quavis ætate invadere, mortemque nobis inferre valent; & quantò facilius hic quàm ille, pestis quàm hydrops, hydrops quàm febris, hominem perimat, ut inde de futuro vitæ necisque statu conjectura formari possit? Quis item recensere casus innumeros mutationum, quibus aer quotidie obnoxius est, ut inde conicere possit, quænam post mensem, nedum post annum, ejus futura sit constitutio? Rursus, quis mentis humanæ naturam, aut admirabilem corporis nostri fabricam satis perspectam habuerit, ut in ludis, qui ab illius acumine aut hujus agilitate in totum vel ex parte dependent, determinare audeat casus, quibus hic vel ille ludentium victoria potiri vel excidere possit? Hæc enim & talia cum dependeant à causis omnino latentibus, atque insuper innumerabili complexionum varietate industriam nostram æternum lufuris, insanientis planè foret, quicquam hoc pacto cognoscere velle.

Verum enimverò alia hinc nobis via suppetit, quâ quæsitum obtineamus; & quod à priori elicere non datur, saltem à *posteriori*, hoc est, ex eventu in similibus exemplis multoties observato eruere licebit; quandoquidem præsumi debet, tot casibus unumquodque posthac contingere & non contingere posse, quoties id antehac in similibus rerum statu contigisse & non contigisse fuerit deprehensum. Nam si ex. gr. factò olim experimento in tercentis hominibus ejusdem, cujus nunc Titius est, ætatis & complexionis, observaveris ducentos eorum ante exactum decennium mortem oppetiisse, reliquos ultra vitam

tam protraxisse, satis tuto colligere poteris, duplo plures casus esse, quibus & Titio intra decennium proximum naturæ debitum solvendum sit, quàm quibus terminum hunc transgredi possit. Ita si quis à plurimis retrò annis ad cœli tempestatem attenderit, notaveritque, quoties ea serena aut pluvia extiterit: aut si quis duobus ludentibus sæpissimè adstiterit, videritque quoties hic aut ille ludi victor evaserit, eo ipso rationem detexerit, quam probabiliter habent inter se numeri casuum, quibus iidem eventus præviis similibus circumstantiis & posthac contingere ac non contingere possunt.

Atque hic modus empiricus determinandi numeros casuum per experimenta neque novus est neque insolitus; nam & Celeb. Auctor Artis cogitandi magni acuminis & ingenii Vir Cap. 12. & seqq. postremæ Partis haud dissimilem præscribit, & omnes in quotidiana praxi eundem constanter observant. Deinde nec illud quenquam latere potest, quòd ad judicandum hoc modo de quopiam eventu non sufficiat sumsisse unum alterumque experimentum, sed quòd magna experimentorum requiratur copia; quando & stupidissimus quisque nescio quo naturæ instinctu per se & nulla prævia institutione (quod sanè mirabile est) compertum habet, quo plures ejusmodi captæ fuerint observationes, eò minus à scopo aberrandi periculum fore. Quanquam autem hoc naturaliter omnibus notum sit, demonstratio, qua id ex artis principiis evincitur, minimè vulgaris est, & proin nobis hic loci tradenda incumbit: ubi tamen parum me præstiturum existimarem, si in hoc uno, quod nemo ignorat, demonstrando subsisterem. Uterius aliquid hic contemplandum superest, quod nemini fortassis vel cogitando adhucdum incidit. Inquirendum nimirum restat, an aucto sic observationum numero ita continuè augeatur probabilitas assequendæ genuinæ rationis inter numeros casuum, quibus eventus aliquis contingere & quibus non contingere potest, ut probabilitas hæc tandem datum quemvis certitudinis gradum superet: an verò Problema, ut sic dicam, suam habeat Asymptoton, h. e. an detur quidam certitudinis gradus quem nunquam excedere liceat, utcunque multiplicentur observationes, putà, ut nunquam ultra semissem, aut $\frac{2}{3}$, aut $\frac{3}{4}$ certitudinis partes certi fieri possimus, nos veram casuum rationem detexisse. Ut exemplo constet quid velim, po-

no in urna quadam te incscio reconditos esse ter mille calculos albos & bis mille nigros, teque eorum numerum experimentis exploraturum educere calculum unum post alterum (reponendo tamen singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligas, ne numerus calculorum in urna minuatur) & observare, quoties albus & quoties ater exeat. Quæritur, utrum toties hoc facere possis, ut decuplo, centuplo, millicuplo &c. probabilius fiat (h. e. ut moraliter tandem certum evadat) numeros vicium, quibus album & quibus nigrum eligis, eandem rationem sesquialteram, qua ipsi calculorum ceu casuum numeri gaudent, inter se habituros, quàm aliam quamlibet rationem ab ista diversam? Nisi enim hoc fiat, fateor actum fore de nostro conatu explorandi numeros casuum per experimenta. At si id obtineat, acquiraturque tandem hoc pacto moralis certitudo (quemadmodum hoc etiam reapse fieri sequenti Capite ostendam) æquè prope modum exploratos habebimus à posteriori casuum numeros, acsi nobis à priori cogniti essent; quod sane in usu vitæ civilis, ubi moraliter certum pro absolute certo habetur, per Ax. 9. Cap. II. abunde sufficit ad conjecturas nostras in quavis materia contingente non minus scientificè dirigendas, atque in ludis alexæ: etenim si loco urnæ substituamus aërem, ex. gr. sive corpus humanum, quæ fontem variarum mutationum atque morborum intra se, velut urna calculos, continent, poterimus utique eodem modo per observationes determinare, quanto facilius in istis subjectis hic vel ille eventus accidere possit.

Ne autem hæc secus intelligantur quàm oportet, probè notandum est, quòd rationem inter numeros casuum, quam experimentis determinare aggredimur, non præcisè & in indivisibili acceptam velim (sic enim contrarium prorsus eveniret, eoquè minus probabile fieret, veram rationem inventam esse, quo plures caperentur observationes) verum rationem in aliqua latitudine sumtam, i. e. binis limitibus conclusam, sed qui tam arcti constitui possunt, quàm quis voluerit. Nimirum, si in exemplo calculorum modo allato duas rationes assumamus $\frac{301}{200}$ & $\frac{222}{200}$, vel $\frac{3001}{2000}$ & $\frac{2220}{2000}$ &c. quarum una proximè major, altera proximè minor est sesquialtera, ostendetur quòd data quavis probabilitate probabilius fieri possit, rationem per expe-

rimenta

rimer ta crebro repetita inventam intra hos limites rationis sesquialteræ, quàm extra casuram esse.

Hoc igitur est illud Problema, quod evulgandum hoc loco proposui, postquam jam per vicennium pressi, & cujus tum novitas, tum summa utilitas cum pari conjuncta difficultate omnibus reliquis hujus doctrinæ capitibus pondus & pretium superaddere potest. Ejus autem solutionem priusquam tradam, paucis objectiones diluam, quas Viri quidam docti contra hæc placita moverunt.

1. Objiciunt primò, aliam esse rationem calculorum, aliam morborum aut mutationum aëris; illorum numerum determinatum esse, horum indeterminatum & vagum. Ad quod respondeo, utrumque respectu cognitionis nostræ æquè poni incertum & indeterminatum; sed quicquam in se & sua natura tale esse, non magis à nobis posse concipi, quàm concipi potest, idem simul ab Auctore naturæ creatum esse & non creatum: quæcunque enim Deus fecit, eo ipso dum fecit, etiam determinavit.

2. Objiciunt secundò, calculorum numerum finitum esse, morborum &c. infinitum. *Resp.* stupendè vastum potius esse, quàm infinitum; sed demus actu infinitum esse: notum est, quòd etiam inter duo infinita determinata possit intercedere ratio, eaque numeris finitis vel accuratè, vel saltem quàm proximè quis voluerit, explicabilis. Sic utique circumferentiæ circuli ad diametrum determinata est ratio, quæ licet accuratè non exprimaturs nisi per numeros cyclicos Ludolphi in infinitum continuatos, ab Archimede tamen, Metio & ipso Ludolpho limitibus ad usum sufficientissimè constrictis definitur: unde nil impedit, quo minus ratio inter duo infinita, sed numeris finitis quàm proximè expressa, finitis quoque experimentis determinetur.

3. Ajunt tertio, numerum morborum non manere constanter eundem, sed quotidie novos pullulare. *Resp.* quin tractu temporis morbi multiplicari queant, inficiari non possumus; & certum est, eum qui vellet ex observationibus hodiernis concludere ad tempora Patrum antediluvianorum, à veritate enormiter aberraturum esse. Inde verò nil aliud sequitur, quàm quòd interdum novæ capiendæ sunt

observationes; quemadmodum capiendæ forent cum calculis, si numerus eorum in urna mutari supponeretur.

CAPUT V.

Solutio Problematis precedentis.

Ut prolixæ rem demonstrationis quâ licet brevitate & perspicuitate expediam, conabor omnia reducere ad abstractam Mathesin, depromendo ex illa sequentia Lemmata, quibus ostensis cætera in nuda applicatione consistent.

Lemma 1. Posita serie quotlibet numerorum 0, 1, 2, 3, 4, &c. à nulla seu cifra naturali se consequentium ordine, quorum extremus & maximus dicatur $r + s$, intermediorum quispiam r , & qui huic ex utraque parte proximè latus cingunt, $r + 1$ & $r - 1$: si continuetur porrò hæc series, donec extremus terminus utcunque multiplex fiat numeri $r + s$, putà donec sit $nr + ns$, atque in eadem ratione augeantur intermedius r , & ejus laterales $r + 1$ & $r - 1$; sic ut eorum loco prodeant nr , $nr + n$ & $nr - n$, ipsaque series initio posita

0, 1, 2, 3, 4, $r - 1$, r , $r + 1$, $r + s$.

mutetur in hanc

0, 1, 2, 3, 4, $nr - n$. . . nr $nr + n$ $nr + ns$.

multiplicabuntur quidem hoc pacto termini seriei, tam illi qui medio nr & alterutri limitum $nr + n$ aut $nr - n$ interjacent, quàm illi qui inde à limitibus ad extremos usque $nr + ns$ aut 0 porrò protenduntur: nunquam tamen (quantumvis magnus assumatur numerus n) numerus terminorum ultra limitem majorem $nr + n$ plusquam $s - 1$; nec numerus terminorum ultra minorem $nr - n$ plusquam $r - 1$ vicibus superabit numerum horum, qui intermedio nr & alterutro limitum $nr + n$ vel $nr - n$ sunt conclusi. Nam facta subtractione patet, à limite majore ad terminum extremum $nr + ns$ esse intervallum terminorum $ns - n$; à limite minore ad alterum extremum 0 intervallum $nr - n$; & ab intermedio numero ad alterutrum limitem intervallum terminorum. Est verò semper $ns - n . n :: s - 1 . 1$; & $nr - n . n :: r - 1 . 1$. Quare constat &c.

Lemma.

Lemm. 2. Omnis potestas integra alicujus binomii $r + s$ terminis exprimitur uno pluribus, quàm est unitatum numerus in potestatis indice. Nam Quadratum constat terminis tribus, Cubus 4, Biquadratum 5, & ita porro, ut notum.

Lemm. 3. In qualibet potestate hujus binomii (saltem cujus index æqualis binomio $r + s \infty t$, aut ejus multiplex, putà $nr + ns \infty nt$) si terminum quempiam M nonnulli præcedant, alii sequantur, & sit numerus omnium præcedentium ad numerum omnium sequentium reciprocè, ut s ad r , seu quod eodem redit, si in illo termino numeri dimensionum literarum r & s directe sint, ut ipsæ quantitates r & s , erit ille terminus omnium in eadem potestate maximus, illi verò propior ab utraque parte major remotiori ab eadem parte: sed idem terminus M ad propiorem minorem habebit rationem, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem.

Dem. 1. Nota res est inter Geometras, quòd potestas nt binomii $r + s$, hoc est, $r + s$ nt hâc serie exprimitur:

$$r^{nt} + \frac{nt}{1} r^{nt-1} s + \frac{nt \cdot nt-1}{1 \cdot 2} r^{nt-2} s^2 + \frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s^3 + \&c.$$

usque ad $+\frac{nt}{1} r s^{nt-1} + s^{nt}$; in cujus progressu pars una binomii r dimensionibus suis gradatim minuitur, pars altera s augetur, existentibus interea coefficientibus secundi & penultimi termini $\frac{nt}{1}$, 3^{ti}

& antepenultimi $\frac{nt \cdot nt-1}{1 \cdot 2}$, 4^{ti} & proantepenultimi $\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$,

& sic deinceps. Et quia numerus omnium præter M terminorum per *Lemm. 2.* est $nt \infty nr + ns$, ex hypoth. autem numerus ipsum præcedentium ad numerum sequentium se habet, ut s ad r , erit numerus eorum, qui terminum M præcedunt, ns ; & qui ipsum sequuntur, nr . Unde ex lege progressionis terminus M fiet

$$\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots nt-ns+1 (nr+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots ns} r^{nr} s^{ns}, \text{ vel}$$

$$\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots nt-nr+1 (ns+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots nr} r^{nr} s^{ns};$$

& similiter terminus huic proximus ad

Ff 3

sinistram

$$\begin{array}{l} \text{siniftram:} \\ \frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots nr+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots ns-1} r^{nr+1} s^{ns-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dextram:} \\ \frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots ns+2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots nr-1} r^{nr-1} s^{ns+1}; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{nec non fequens verfus finiftram:} \\ \frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots nr+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots ns-2} r^{nr+2} s^{ns-2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dextram:} \\ \frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots ns+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots nr-2} r^{nr-2} s^{ns+2}; \end{array}$$

è quibus, præmiſſa ubique convenienti reductione tam coëfficientium quàm terminorum purorum per diviſores communes, patebit, quòd terminus M ad proximum verſus finiftram ſe habet, ut $\frac{nr+1 \cdot s}{ns \cdot r}$, hic ad ſequentem, ut $\frac{nr+2 \cdot s}{ns-1 \cdot r}$ &c. nec non terminus M ad proximum verſus dextram, ut $\frac{ns+1 \cdot r}{nr \cdot s}$; & hic ad ſequentem, ut $\frac{ns+2 \cdot r}{nr-1 \cdot s}$. &c. Eſt verò $\frac{nr+1 \cdot s}{nr \cdot s} (nrs+s) > \frac{ns \cdot r}{nrs}$, & $\frac{nr+2 \cdot s}{ns-1 \cdot r} (nrs+2s) > \frac{ns-1 \cdot r}{nrs-r}$ &c. ut & $\frac{ns+1 \cdot r}{nr \cdot s} (nrs+r) > \frac{nr \cdot s}{nrs}$, & $\frac{ns+2 \cdot r}{nr-1 \cdot s} (nrs-2r) > \frac{nr-1 \cdot s}{nrs-s}$ &c. ut apparet. Ergò terminus M major proximo ab utraque parte, hic major remotiori ab eadem parte, &c. Q. E. D.

2. Ratio $\frac{nr+1}{ns}$ minor eſt ratione $\frac{nr+2}{ns-1}$, ut patet: ergò & addita communi ratione $\frac{s}{r}$, ratio $\frac{nr+1 \cdot s}{ns \cdot r} < \frac{nr+2 \cdot s}{ns-1 \cdot r}$. Similiter ratio $\frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$, ut liquet: igitur addita ratione communi $\frac{r}{s}$, ratio quoque $\frac{ns+1 \cdot r}{nr \cdot s} < \frac{ns+2 \cdot r}{nr-1 \cdot s}$. Sed ratio $\frac{nr+1 \cdot s}{ns \cdot r}$ eſt illa quam terminus M habet ad proximum verſus finiftram; & $\frac{nr+2 \cdot s}{ns-1 \cdot r}$ illa, quam habet hic ad ſequentem: item ratio $\frac{ns+1 \cdot r}{nr \cdot s}$ eſt ea, quam terminus M habet ad proximum verſus dextram; & $\frac{ns+2 \cdot r}{nr-1 \cdot s}$, quam habet hic ad ſequentem; uti modò oſtenſum eſt, & ad cæteros omnes ex æquo concludi poteſt. Quare maximus terminorum M ad propiorum ex utraque parte minorem rationem habet, quàm (in pari terminorum intervallo) propior ad remotiorem ex eadem parte. Q. E. D.

Lemm.

Lemm. 4. In potestate binomii, cujus index nt , tantus potest concipi numerus n , ut maximus terminorum M ad alios duos L & Λ , intervallo n terminorum sinistrorsum & dextrorsum à se distantes, rationem acquirat qualibet data majorem.

Dem. Cùm enim in *Lemm.* præced. terminus M sit inventus

$$\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots nr+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots ns} r^{nr} s^{ns}, \text{ vel}$$

$$\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots ns+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots nr} r^{nr} s^{ns},$$

erit ex lege progressionis (addito n ad ultimum factorem coefficientis in numeratore, & ablato ab ultimo in denominatore; nec non alterius literarum r & s dimensionibus eodem n auctis, alterius diminutis) terminus

L ad sinistram:

Λ ad dextram.

$$\frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots nr+n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots ns-n} r^{nr+n} s^{ns-n} \quad \Bigg| \quad \frac{nt \cdot nt-1 \cdot nt-2 \dots ns+n+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots nr-n} r^{nr-n} s^{ns+n}$$

unde facta convenienti reductione per divisores communes, resultat

$$\frac{M}{L} \propto \frac{nr+n \cdot nr+n-1 \cdot nr+n-2 \dots nr+1 \cdot X s^n}{ns-n+1 \cdot ns-n+2 \cdot ns-n+3 \dots ns \cdot X r^n}$$

$$\Bigg| \frac{M}{\Lambda} \propto \frac{ns+n \cdot ns+n-1 \cdot ns+n-2 \dots ns+1 \cdot X r^n}{nr-n+1 \cdot nr-n+2 \cdot nr-n+3 \dots nr \cdot X s^n}$$

sive (dimensionibus quantitatum r^n & s^n in singulos factores, ob æqualem amborum numerum, æqualiter distributis)

$$\frac{M}{L} \propto \frac{nrs+ns \cdot nrs+ns-s \cdot nrs+ns-2s \dots nrs+s}{nrs-nr+r \cdot nrs-nr+2r \cdot nrs-nr+3r \dots nrs}$$

$$\Bigg| \frac{M}{\Lambda} \propto \frac{nrs+nr \cdot nrs+nr-r \cdot nrs+nr-2r \dots nrs+r}{nrs-ns+s \cdot nrs-ns+2s \cdot nrs-ns+3s \dots nrs}$$

sed hæ rationes sunt infinite magnæ, cùm numerus n ponitur infinitus; tunc enim evanescent numeri 1, 2, 3, &c. præ n , ipsæque nr & n & 1, 2, 3, &c. & ns & n & 1, 2, 3, &c. tantundem valent, ac nr & n & ns & n , sic ut divisione instituta per n , prodeat

$$\frac{M}{L} \propto$$

$$\frac{M}{L} \infty \frac{rs + s.rs + s.rs + s \dots rs}{rs - r.rs - r.rs - r \dots rs} \quad \Bigg| \quad \frac{M}{\Lambda} \infty \frac{rs + r.rs + r.rs + r \dots rs}{rs - s.rs - s.rs - s \dots rs}$$

quæ quantitates componuntur, ut patet, ex tot rationibus $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$, quot sunt factores: at horum numerus est n , h. e. infinitus; cum inter primum $nr + n$, aut $ns + n$, & ultimum $nr + 1$ aut $ns + 1$ differentia sit $n - 1$. Idcirco rationes istæ sunt infinituplicatæ rationum $\frac{rs+s}{rs-r}$ & $\frac{rs+r}{rs-s}$, ac proinde simpliciter infinitæ: qua de sequela si dubites, concipe infinitos continuè proportionales in ratione $rs + s$ ad $rs - r$, vel $rs + r$ ad $rs - s$; erit primi ad tertium ratio duplicata, primi ad 4^{um} triplicata, ad 5^{um} quadruplicata, &c. ad ultimum infinituplicata rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$: constat autem, rationem primi ad ultimum infinite magnam esse, ob ultimum $\infty 0$. (*Vid. Coroll. Posit. nostræ 6^{te} de Seriebus Infinitis.*) Quare etiam constat, infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ vel $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinitam esse. Ostensum itaque est, quòd in potestate infinite alta binomii terminus maximus M ad duos L & Λ rationem habeat omni assignabili ratione majorem. Q. E. D.

Lemma. 5. Positis, quæ in præced. tantus intelligi potest numerus n , ut summa omnium terminorum ab intermedio & maximo M ad ambos usque L & Λ inclusivè sumtorum, ad summam omnium reliquorum extra hos limites L & Λ utrinque protensorum rationem habeat omni data ratione majorem.

Dem. Vocentur termini intra maximum M & limitem finitum L , secundus à maximo F , tertius G , quartus H , &c. & extra limitem L , secundus ab ipso P , tertius Q , quartus R , &c. Quoniam igitur ratio $\frac{M}{F} < \frac{L}{P}$ & $\frac{F}{G} < \frac{P}{Q}$, & $\frac{G}{H} < \frac{Q}{R}$ &c. per part. 2. Lem. 3. erit quoque vicissim $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. Quare cum positio n numero infinito, ratio $\frac{M}{L}$ sit infinite magna, per

Lem.

Leñ. 4. fortius etiam cæteræ rationes $\frac{F}{P}$, $\frac{G}{Q}$, $\frac{H}{R}$, &c. erunt infinitæ; eaque propter & $\frac{F+G+H+\&c.}{P+Q+R+\&c.}$ infinita, h. e. omnes simul termini intra maximum M & limitem L contenti infinities majores erunt totidem simul terminis extra L porrectis ipsi L proximis. Et quoniam numerus omnium terminorum extra limitem L numerum omnium intra eundem & maximum M non nisi $s-1$ (h. e. non nisi finitis) vicibus superat, per 1. Leñ. ipsique insuper termini eo minores evadunt, quo sunt à limite remotiores, per 1. part. 3. Leñ. idcirco termini simul omnes intra M & L (etiam non computato M) omnes simul terminos extra L adhuc infinities superabunt. Similiter autem ostendetur ab altera parte, quòd omnes intra M & A conclusi termini omnes extra A porrectos (quorum numerus priorum numerum per Leñ. 1. non nisi $r-1$ vicibus excedit) infinities superant. Quare denique omnes termini inter utrumque limitem L & A comprehensi (demto licet maximo M) omnes omninò terminos extra positos itidem infinities superabunt. Ergo multo magis unà cum maximo. Q. E. D.

Schol. Objici posset contra 4 & 5^{um} Leña, ab his qui speculationibus infiniti non assueverunt, quòd etiamsi in casu numeri n infiniti factores quantitatum, quæ rationes $\frac{M}{L}$ & $\frac{M}{A}$ exprimunt, $n r \text{ } \& \text{ } n \text{ } \& \text{ } 1, 2, 3, \&c.$ & $n s \text{ } \& \text{ } n \text{ } \& \text{ } 1, 2, 3, \&c.$ tantundem valent ac $n r \text{ } \& \text{ } n$ & $n s \text{ } \& \text{ } n$, evanescentibus ratione singulorum factorum numeris 1, 2, 3, &c. fieri tamen possit, ut omnes collecti vel in se ducti (propter infinitum factorum numerum) in infinitum excrescant, adeoque rationem infinituplicatam rationis $\frac{rs+s}{rs-r}$ aut $\frac{rs+r}{rs-s}$ infinite diminuunt, h. e. finitam reddant. Cui scrupulo melius satisfacere non possum, quàm si nunc porro modum ostendam assignandi, reapse finitum numerum n , sive finitam potestatem binomii, in qua summa terminorum intra limites L & A ad summam terminorum extra, rationem habeat data ratione quantumvis magna, quam litera c designo, majorem; utpote quo ostenso objectionem ultro corruere necesse est.

Gg

Hunc

Hunc in finem assumo rationem quamlibet majoris inæqualitatis, quæ tamen sit minor ratione $\frac{rs+s}{rs-r}$ (pro terminis ad partem sinistram) puta rationem $\frac{rs+s}{rs}$ seu $\frac{r+1}{r}$, eamque toties (m vicibus) multiplico, quoad æquet vel superet rationem $c.s-1$ ad 1 , hoc est, ut sit: $\frac{r+1}{r^m} \infty$ vel $\succ c.s-1$. Quoties autem id fieri de-

beat, compendiosè investigatur per logarithmos; nam sumtis quantitatum logarithmis fit $mLr+1 - mLr \infty$ vel $\succ Lc.s-1$, & divisione peracta statim habetur $m \succ \frac{Lc.s-1}{Lr+1-Lr}$; quo invento sic per-

go: In serie illa fractionum sive factorum, $\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}$.

$\frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r} \cdot \frac{nrs+ns-2s}{nrs-nr+3r} \cdot \dots \cdot \frac{nrs+s}{nrs}$, è quorum ductu per Lem.

4. resultat ratio $\frac{M}{L}$, observare licet, quòd singulæ fractiones sint

minores quàm $\frac{rs+s}{rs-r}$, ita tamen ut ad hanc continuè propius accedant, quo major sumitur n : itaque quælibet earum aliquando fiet

æqualis ipsi $\frac{rs+s}{rs} \infty \frac{r+1}{r}$; Quare videndum, quantus sit accipiendus valor n , ut fractio (cujus numerus ordinis est m) æquetur

ipsi $\frac{r+1}{r}$. Est verò (ut ex progressionis lege perspicuum fit) fra-

ctio ordine m hæc: $\frac{nrs+ns-ms+s}{nrs-nr+mr}$, quæ adæquata fractioni $\frac{r+1}{r}$,

dat $n \infty m + \frac{ms-s}{r+1}$, & inde $nr \infty mr + \frac{mst-st}{r+1}$. Dico, hunc

esse indicem potestatis, ad quam si elevetur binomium $r+s$, futurum ut terminus maximus M superet limitem L plus quàm $c.s-1$

vicibus. Nam quia fractio ordine m per hanc assumptionem numeri n fit: $\frac{r+1}{r}$, per hypoth. & verò $\frac{r+1}{r}$ fractio secum ipsa m vicibus

multiplicata, h. e. $\frac{r+1}{r^m}$, per constr. æquet vel superet $c.s-1$,

fit ut:

fit ut hæc fractio in omnes præcedentes fractiones ducta multo magis excedat $c \cdot s - 1$; cum singulæ præcedentium majores sint quàm $\frac{r+1}{r}$. Ergo magis adhuc superabit $c \cdot s - 1$, quando ducitur una cum præcedentibus in omnes etiam consequentes, utpote quarum singulæ saltem æqualitatis rationem excedunt. Sed productum omnium harum fractionum rationem exhibet termini M ad L; igitur omnino constat, terminum M superare limitem L plus quàm $c \cdot s - 1$ vicibus. Jam autem $\frac{M}{L} < \frac{F}{P} < \frac{G}{Q} < \frac{H}{R}$ &c. ut ostensum. Hinc multo magis secundus à maximo M secundum à limite L plus quàm $c \cdot s - 1$ vicibus superabit, & magis adhuc tertius tertium, &c. Itaque tandem omnes termini intra maximum M & limitem L superant totidem è maximis extra hunc limitem plus quàm $c \cdot s - 1$ vicibus; adeoque superant totidem illorum $s - 1$ vicibus sumtos plus quàm c vicibus. Ergo multo evidentius superant omnes extra limitem L, quorum non nisi $s - 1$ vicibus plures sunt, plus quàm c vicibus.

Pro terminis dextimis pari modo procedo: Assumo rationem

$$\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}, \text{ \& facio } \frac{s+1}{s}^m \infty c \cdot r - 1, \text{ invenioq; } m \infty \frac{L c \cdot r - 1}{Ls+1-Ls}.$$

Deinde, in serie fractionum $\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s} \cdot \frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s}$

$\frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s} \dots \frac{nrs+r}{nrs}$, quæ rationem $\frac{M}{\Lambda}$ innuit, pono fractio-

nem, quæ ordine est m , nempe $\frac{nrs+nr-mr+r}{nrs-ns+ms} \infty \frac{s+1}{s}$, inde-

que elicio $n \infty m + \frac{mr-r}{s+1}$, ac proin $nt \infty mt + \frac{mrt-rt}{s+1}$. Quo

facto similiter ostendetur, ut antea, quòd binomio $r+s$ ad hanc potestatem sublato, terminus ejus maximus M superabit limitem Λ plus quàm $c \cdot r - 1$ vicibus & per consequens etiam, quòd omnes maximo M & limite Λ conclusi superabunt omnes extra hunc limitem, quorum non nisi $r - 1$ vicibus plures sunt, plus quam c vicibus. Itaque finaliter tandem concludimus, quòd elevato binomio $r+s$ ad potestatem, cujus index æquetur majori harum duarum quantitatum $mt +$

Gg 2

$$\frac{mst-rt}{r+1}$$

$\frac{mst - st}{r + 1}$ & $mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}$, omnes simul termini inter utrumque limitem L & A comprehensi multo pluribus quàm c vicibus superabunt omnes simul terminos extra limites ab utraque parte protensos. Reperta igitur est finita potestas, quæ optatam habeat proprietatem. Q. E. F.

Propos. Princip. Sequitur tandem Propositio ipsa, cujus gratia hæc omnia dicta sunt, sed cujus nunc demonstrationem sola Lemmatum præmissorum applicatio ad præsens institutum absolvet. Ut circumlocutionis tædium vitem, vocabo casus illos, quibus eventus quidam contingere potest, *fœcundos* seu *fertiles*; & *steriles* illos, quibus idem eventus potest non contingere: nec non experimenta *fœcunda* sive *fertilia* illa, quibus aliquis casuum fertilium evenire deprehenditur; & *infœcunda* sive *sterilia*, quibus sterilium aliquis contingere observatur. Sit igitur numerus casuum fertilium ad numerum sterilium vel præcisè vel proximè in ratione $\frac{r}{s}$, adeoque ad numerum omnium in ratione $\frac{r}{r+s}$ seu $\frac{r}{t}$, quam rationem terminent limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$. Ostendendum est, tot posse capi experimenta, ut datis quotlibet (puta c) vicibus verisimilius evadat, numerum fertilium observationum intra hos limites quàm extra casurum esse, h. e. numerum fertilium ad numerum omnium observationum rationem habiturum nec majorem quàm $\frac{r+1}{t}$, nec minorem quàm $\frac{r-1}{t}$.

Dem. Ponatur numerus capiendarum observationum nt , & quærat, quanta sit expectatio, seu quanta probabilitas, ut omnes existant fœcundæ, exceptis primo nulla, dein una, duabus, 3, 4 &c. sterilibus. Quandoquidem autem in qualibet observatione præsto sunt ex hyp. r casus, eorumque r fœcundi & s steriles, & singuli casus unius observationis cum singulis alterius combinari, combinatique rursus cum singulis tertiæ, 4^{tæ} &c. conjungi possunt, facile patet, huic negotio quadrare Regulam Annotationibus Prop. XIII.

XIII. primæ Part. in fine subnexam, & ejus Corollarium secundum, quod universalem formulam continet, cujus ope cognoscitur, quòd expectatio ad nullam observationem sterilem sit $r^{nt} : t^{nt}$, ad unam

$\frac{nt}{1} r^{nt-1} s : t^{nt}$, ad duas steriles $\frac{nt \cdot nt - 1}{1 \cdot 2} r^{nt-2} s s : t^{nt}$, ad tres

$\frac{nt \cdot nt - 1 \cdot nt - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nt-3} s s s : t^{nt}$, & sic deinceps; adeoque (rejectione

communi nomine t^{nt}) quod gradus probabilitatum seu numeri casuum, quibus contingere potest, ut omnia experimenta sint fœcunda, vel omnia præter unum sterile, vel omnia præter duo, 3, 4 &c.

sterilia, ordine exprimantur per r^{nr} , $\frac{nr}{1} r^{nr-1} s$, $\frac{nr \cdot nr - 1}{1 \cdot 2} r^{nr-2} s s$,

$\frac{nr \cdot nr - 1 \cdot nr - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{nr-3} s s s$, &c. ipsissimos nempe terminos potestatis

nt binomii $r + s$, in Lemmatis modo nostris excussæ: unde jam cætera omnia oppido manifesta sunt. Patet enim ex progressionis natura, quòd numerus casuum, qui cum ns sterilibus experimentis nr fœcunda adducunt, sit ipse terminus maximus potestatis M , utpote quem ns termini præcedunt, & nr sequuntur, per Lem. 3. item, quòd numeri illorum casuum, quibus aut $nr + n$ aut $nr - n$ experimentis fœcundis cæterisque sterilibus esse contingit, exhibeantur per terminos potestatis L & Λ , quippe intervallo n terminorum à maximo M utrinque distantes; & per consequens etiam, quòd summa casuum, quibus non pluribus experimentis quàm $nr + n$; nec paucioribus quàm $nr - n$ fœcundis esse contingit, exprimatur per summam terminorum potestatis intra limites L & Λ comprehensorum; summa reliquorum casuum, quibus aut plura aut pauciora experimenta fœcunda redduntur, per cæterorum terminorum limites hos L & Λ excedentium summam expressa. Quare cum tanta sumi possit potestas binomii, ut summa terminorum utroque limite L & Λ inclusorum pluribus quàm c vicibus superet summam cæterorum limites hos excedentium, per Lem. 4. & 5. sequitur etiam, capi posse tot observationes, ut summa casuum, quibus numero fertiliu observationum ad numerum omnium rationem habere contingit, non excedentem limites $\frac{nr + n}{nt}$ &

$\frac{nr-n}{nr}$, seu $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, pluribus quàm c vicibus superet sumam casuum reliquorum; h. e. ut pluribus quàm c vicibus probabilius reddatur, rationem numeri observationum fertilium ad numerum omnium intra hos limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$, quàm extra casuram esse. Quod demonstrandum erat.

In speciali autem horum applicatione ad numeros satis per se patet, quòd quo majores in eadem ratione assumuntur numeri r , s & t , eo arctius quoque constringi possunt limites $\frac{r+1}{t}$ & $\frac{r-1}{t}$ rationis $\frac{r}{s}$. Idcirco si ratio inter numeros casuum $\frac{r}{s}$, per experimenta determinanda, sit ex. gr. sesquialtera, pro r & s non pono 3 & 2, sed 30 & 20, vel 300 & 200 &c. sufficiat posuisse $r \propto 30$, $s \propto 20$, & $t \propto r+s \propto 50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{t} \propto \frac{31}{50}$, & $\frac{r-1}{t} \propto \frac{29}{50}$; & statuatur insuper $c \propto 1000$: sic fiet ex Scholii præscripto, pro terminis ad

sinistram:

$$m > \frac{Lc \cdot s - 1}{Lr + 1 - Lr} \propto \frac{4 \cdot 2787536}{142405} < 301$$

$$nt \propto mt + \frac{mst - st}{r+1} < 24728$$

dextram:

$$m > \frac{Lc \cdot r - 1}{Ls + 1 - Ls} \propto \frac{4 \cdot 4623980}{211893} < 211$$

$$nt \propto mt + \frac{mrt - rt}{s+1} \propto 25550.$$

Unde per ibi demonstrata infertur, quòd institutis 25550 experimentis multo plus millies verisimilius sit, rationem quam numerus fertilium observationum obtinebit ad numerum omnium, intra hos limites $\frac{31}{50}$ & $\frac{29}{50}$ casuram, quàm extra. Atque eodem pacto, posita $c \propto 10000$, aut $c \propto 100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius fore, si fiant experimenta 31258; & plus quàm centies millies,

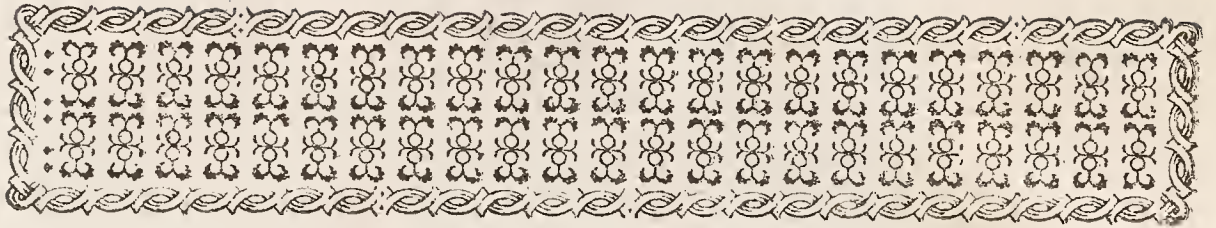
millies, si capiantur 36966, &c. & sic porrò in infinitum, additis nempe continuo ad 25550 aliis 5708 experimentis. Unde tandem hoc singulare sequi videtur, quòd si eventuum omnium observationes per totam aeternitatem continuarentur, (probabilitate ultimo in perfectam certitudinem abeunte) omnia in mundo certis rationibus & constanti vicissitudinis lege contingere deprehenderentur; adeo ut etiam in maximè casualibus atque fortuitis quandam quasi necessitatem, & , ut sic dicam, fatalitatem agnoscere teneamur; quam nescio annon ipse jam Plato intendere voluerit, suo de universali rerum apocatastasi dogmate, secundum quod omnia post innumerabilium seculorum decursum in pristinum reversione statum prædixit.



The first part of the history of the world is the history of the creation of the world and the life of the first man, Adam. This part of the history is contained in the first five chapters of the Bible. The second part of the history of the world is the history of the life of the first man, Adam, and his descendants. This part of the history is contained in the next five chapters of the Bible. The third part of the history of the world is the history of the life of the first man, Adam, and his descendants, and the life of the first man, Adam, and his descendants. This part of the history is contained in the next five chapters of the Bible.



TRACTATUS
DE
SERIEBUS INFINITIS
Earumque
Summa Finita,
ET
Ufu in Quadraturis Spatiorum
& Rectificationibus Curvarum.



PRÆFATIO.



Um non ita pridem in Serierum Infinitarum speculationem incidissem, prima, cujus summa post Geometricam Progressionem ab aliis jam tractatam mihi sese offerebat, erat series fractionum, quarum denominatores Geometrica, numeratores Arithmetica progressionem crescunt: quod cum Fratri indicassem, non tantum mox idem adinvenit ille, sed & præterea novæ cujusdam fractionum seriei, cujus denominatores Trigonalium, ut vocantur, numerorum dupli erant, summam pervestigavit; quam vero & ipse, cum significasset, postridie detexi, propositis ei vicissim aliis nonnullis, quæ interea, ut clavus clavum trudere solet, occasione hac repereram. Quibus inventis certatim alter alterum sic exercuimus, ut paucorum dierum spatio non tantum serierum illarum, quas Celeb. Leibnitijs in Actis Erud. Lips. Anno 1682. M. Febr. & 1683. M. Octob. recenset, nosque paulo antea mirati fuimus, summas dare possemus, sed & plura alia eaque non contemnenda ex gemino duntaxat fundamento invenerimus, quorum unum consistit in resolutione seriei in alias infinitas series, alterum in subductione seriei uno alterove termino mutilatæ à seipsa integra. Horum vero præcipua (cum eorum nihil apud hos quos legi hæctenus, publicatum viderim) enucleanda

anda proponam, præmissis nonnullis, quæ passim apud alios quoque vulgatæ prostant, Propositionibus, ne illas aliunde petere opus esset. Cæterum quantæ sit necessitatis pariter & utilitatis hæc serierum contemplatio, ei sane ignotum esse non poterit, qui perspectum habuerit, ejusmodi series sacram quasi esse anchoram, ad quam in maxime arduis & desperatæ solutionis Problematibus, ubi omnes alias humani ingenii vires naufragium passæ, velut ultimi remedii loco confugiendum est.



Axiomata seu Postulata.

1. **O**Mne quantum est divisibile in partes se minores.
2. Omni quantitate finita potest accipi major.
3. Si quantitas quæpiam multata parte sui aliqua subtrahitur à seipsa integra, relinquitur illa pars.

PROPOSITIONES:

I. **Q**uod data quavis quantitate minus est, illud est non-quantum seu nihil.
Dem. Nam si quantum esset, dividi posset in partes se minores, per Axiom. 1. non igitur esset data quavis quantitate minus, contra hyp.

II. *Quod data quavis quantitate majus est, infinitum est.*

Nam si finitum esset, illo posset accipi quantitas major, per Ax. 2. non igitur quavis data quantitate foret majus, contra hyp.

III. *Omnis Progressio Geometrica continuari potest per terminos infinitos.*

Semper enim fieri potest: Ut primus terminus ad secundum, sic postremus ad sequentem, & sequens ad alium & alium sine fine in infinitum; quorum quidem terminorum nullus æquari potest vel nihilo vel infinito, cum secus ad illum præcedens eam rationem habere non posset, quam habet primus ad secundum, contr. defin. progr.

IV. *Si sit Progressio Geometrica quæcunque A, B, C, D, E; & alia Arithmetica totidem terminorum A, B, F, G, H, incipiens ab iisdem terminis A*

Hh 2

& B,

¶ B, erunt reliquorum singuli in Geometrica singulis ordine sibi respondentibus in Arithmetica majores, tertius tertio, quartus quarto, ultimus ultimo, adeoque omnes omnibus.

Quia enim $A . B :: B . C :: C . D :: D . E$. erit per 25. 5. Eucl. tum $A + C > 2 B \infty$ (ex nat. Progr. Arith.) $A + F$; unde $C > F$: tum $A + D > B + C > B + F \infty A + G$; unde $D > G$: tum $A + E > B + D > B + G \infty A + H$; unde $E > H$. Quæ erant demonstr.

V. In progressionē Geometrica crescente A, B, C, D, E perveniri tandem potest ad terminum E quovis dato Z majorem.

Incipiat ab iisdem terminis Progressio Arithm. A, B, F, G, H, continuata quousque ultimus H superet Z (id enim fieri posse claret,) tum vero continuetur Geometrica per terminos totidem, eritque per præced. postremus $E > H > Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geom. crescente infinitorum terminorum postremus terminus est ∞ , per Prop. II. (∞ est Nota Infiniti.)

VI. In Progress. Geometr. decreſcente A, B, C, D, E pervenitur tandem ad terminum E quovis dato Z minorem.

Constituatur Progressio ascendens Z, Y, X, V, T, in ratione B ad A, quousque ultimus terminus T superet A, (quod fieri posse per præced. constat;) tum continuetur altera descendendo per totidem terminos A, B, C, D, E; eritque ultimus $E <$ dato Z. Quia enim Progressiones A, B, C, D, E, & T, V, X, Y, Z, per eandem rationem A ad B progrediuntur, & terminos numero æquales habent, erit ex æquo $A . E :: T . Z$. sed $A < T$, per constr. Ergo & $E < Z$. Q. E. D.

Coroll. Hinc in Progr. Geomet. decreſcente in infinitum continuata ultimus terminus est 0, per Prop. I.

VII. In omni Progr. Geom. A, B, C, D, E, primus terminus est ad secundum, sicut summa omnium excepto ultimo ad summam omnium excepto primo. ($A . B :: A + B + C + D . B + C + D + E$.)

Quia enim $A . B :: B . C :: C . D :: D . E$. erit per 12. 5. Eucl. $A . B :: A + B + C + D . B + C + D + E$. Q. E. D.

VIII. Progressionis Geom. cujuscunque A, B, C, D, E, summam S invenire. Per præc. est $A . B :: S - E . S - A$; quare convertendo $A . A = B :: S - E . A = E$; unde $S - E \infty \frac{A \text{ in } A = E}{A = B}$, & $S \infty \frac{A \text{ in } A = E}{A = B} + E$. (= denotat differen-

differentiam duarum quantitatum, quibus interferitur, cum non definitur, penes utram sit excessus.)

Coroll. Si Progressio Geometr. descendendo continuetur in infinitum, adeoque ultimus terminus per Coroll. VI. evanescat, erit summa omnium $\frac{Aq}{A-B}$: unde liquet, quo pacto infiniti etiam termini finitam summam constituere possunt.

IX. Si Series infinita continuè proportionalium A, B, C, D, E, &c. decreseat in ratione A ad B, erunt summa omnium terminorum, omnium dempto primo, omnium demtis duobus primis, &c. etiam continuè proportionales, & quidem in eadem ratione A ad B.

Quoniam $A. B :: B. C :: C. D$, erit tum $Aq. Bq :: Bq. Cq$: tum etiam $A. B :: A - B. B - C :: B - C. C - D$, quare dividendo rationes æquales per æquales, $\frac{Aq}{A-B} : \frac{Bq}{B-C} :: \frac{Bq}{B-C} : \frac{Cq}{C-D}$, hoc est per Cor. præced. Summa omnium ad omnes sequentes primum, ut hi ad omnes sequentes secundum. Q. E. D. Et proinde per 19. 5. Eucl. summa omnium ad omnes sequentes primum, ut primus ad secundum. Q. E. D.

X. Seriei infinita fractionum, $\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{a+2c}{b+2d}, \frac{a+3c}{b+3d}$, &c. quarum numeratores & denominatores crescunt Progressione Arithmet. ultimus terminus est fractio $\frac{c}{d}$, cujus numerator & denominator sint communes progressionum differentia.

Ad hoc analyticè investigandum consideretur quæsitus terminus ut cognitus, & vocetur t ; numerus vero termini ut quæsitus, & dicatur n ; eritque ex generatione progressionis terminus optatus $t \propto \frac{a+nc-c}{b+nd-d}$, ideoque $n \propto 1 + \frac{bt-a}{c-dt}$, quod æquari debet infinito: & quia numerator hujus fractionis est finitus (nam infinitus esse non potest, aliàs t deberet esse $\infty \infty$; ideoque esset $c < dt$, ipsaque adeo fractio negativa quantitas, quod absurdum,) oportet ut denominator sit æqualis nihilo, ac proinde $c \propto dt$, & $t \propto \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Brevius ita: Ex seriei genesi patet, terminum infinitesimum esse $\frac{a+\infty c}{b+\infty d} \propto \frac{\infty c}{\infty d} \propto \frac{c}{d}$. Q. E. D.

Coroll. Summa omnium terminorum, sive ultimus primo major

fit minorve, necessario infinita est; infiniti enim termini minori horum duorum æquales infinitam dant summam: Unde à fortiori, &c.

XI. Fractionis ad aliam ratio composita est ex ratione directâ numeratorum & reciproca denominatorum.

Nam $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} :: \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{BD} :: AD \cdot BC :: A \cdot C + D \cdot B$. Q. E. D.

XII. In serie fractionum, quarum numeratores crescunt Progressione Arith. denominatores Geometrica, aut vice versa, ut $\frac{A}{F} \cdot \frac{A+C}{G} \cdot \frac{A+2C}{H} \cdot \frac{A+3C}{I}$, aut $\frac{F}{A} \cdot \frac{G}{A+C} \cdot \frac{H}{A+2C} \cdot \frac{I}{A+3C}$: Si N nomen ordinis ultimi termini ad unitatem majorem rationem habeat, quam G ad G-F, erit ille terminus ibi sequenti major, hinc minor.

30.5 E (Whiston)
1. Hyp. Quia N. 1. > G. G-F, erit convertendo N. N-1 < G. F. & CN. CN-C < G. F. Ergo CN-C: in G > CN in F, ergo fortius (ob AG > AF) A+NC-C: in G > A+CN: in F, hoc est, Numerator termini N in G > Numeratore termini sequentis in F: Sed ita se habet terminus N ad terminum sequentem, per præced. Quare terminus N major sequenti, & ita deinceps ab illo omnes. Q. E. D.

2. Hyp. Inversis invertendis eodem modo demonstratur.

XIII. Si infinitæ sint fractiones $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \cdot \frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{O}{P}$. &c. quarum numeratores crescunt progr. Arithm. & denominatores Geom. erit ultimus terminus 0; sin illi crescunt Geometr. hi Arithm. erit ultimus ∞.

1. Hyp. Si primus terminus secundo non sit major, continuari saltem poterit Progressio, quousque præcedens superet sequentem, per præced. Esto $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$, & sint infiniti continuè proportionales G, I, Q, R, &c. unde propter H, L, N, P :: erunt & ipsæ fractiones $\frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{Q}{N} \cdot \frac{R}{P}$ &c. :: quæ ob $\frac{G}{H} > \frac{I}{L}$. in nihilum tandem abeunt per Cor. VI. Quare cum Q > M, R > O, &c. per IV. multo magis $\frac{G}{H} \cdot \frac{I}{L} \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{O}{P}$, &c. in nihilum abibunt. Q. E. D.

2. Hyp. Nisi primus secundo minor sit, continuetur progressio, quousque præcedens sequenti minor fiat, per præced. Esto $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$, & sint

& sint infiniti $H, L, S, T, \&c.$ \therefore unde propter $G, I, M, O, \&c.$ \therefore ,
 & ipsæ fractiones $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{S}, \frac{O}{T}, \&c.$ proportionales erunt, quæ
 ob $\frac{G}{H} < \frac{I}{L}$ in infinitum desinunt per Cor. V. Quare cum $S > N,$
 $T > P, \&c.$ per IV. multo magis $\frac{G}{H}, \frac{I}{L}, \frac{M}{N}, \frac{O}{P}, \&c.$ in infinitum
 excrescent. Q. E. D.

XIV. Invenire summam seriei infinite fractionum, quarum denomina-
 tores crescunt progressionem Geometricam quacunque, numeratores verò progre-
 diuntur vel juxta numeros naturales 1, 2, 3, 4, &c. vel trigonales 1, 3, 6,
 10, &c. vel pyramidales 1, 4, 10, 20, &c. aut juxta quadratos 1, 4, 9,
 16, &c. aut cubos 1, 8, 27, 64, &c. eorumve equemultiplices.

1. Si Numeratores progrediuntur juxta numeros naturales:

Summa invenitur, resolvendo seriem propositam A in alias infini-
 tas series $B, C, D, E, \&c.$ quæ singulæ geometricè progrediuntur, qua-
 rumque summæ (si primam hîc excipias) novam Geometricam pro-
 gressionem F constituunt per IX. cujus quidem, uti cæterarum, sum-
 ma per Coroll. VIII. reperitur. En operationem:

$$\begin{array}{l}
 A \infty \frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bdd} + \frac{a+3c}{bd^3} \&c. \infty B + C + D + E + \&c. \\
 \hline
 B \infty \frac{a}{b} + \frac{a}{bd} + \frac{a}{bdd} + \frac{a}{bd^3} \&c. \infty \frac{ad}{bd-b} \\
 C \infty \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. \infty \frac{c}{bd-b} \\
 D \infty \dots + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. \infty \frac{c}{bdd-bd} \\
 E \infty \dots \dots \dots + \frac{c}{bd^3} \&c. \infty \frac{c}{bd^3-bdd} \\
 \&c. \infty \dots \dots \dots \&c. \infty \&c.
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 F \infty \frac{cd}{b \text{ in } Q; d-1} \text{ cui ad-} \\
 \text{ditus primus termi-} \\
 \text{nus } \frac{ad}{bd-b} \text{ producit to-} \\
 \text{tius propositæ seriei } A
 \end{array} \right\}$$

$$\frac{ad}{b \text{ in } d-1} + \frac{cd}{b \text{ in } Q; d-1} \infty \text{ summam.}$$

2. Si Numeratores sunt juxta Trigonales:

Series proposita G resolvenda est in aliam H , cujus numeratores
 sint juxta præcedentem hypothefin, hoc modo:

$$G \propto \frac{c}{b} + \frac{3c}{bd} + \frac{6c}{bdd} + \frac{10c}{bd^3} \&c.$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{cd}{bd-b} \\ + \frac{2c}{bd} + \frac{2c}{bdd} + \frac{2c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{2c}{bd-b} \\ + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{3c}{bdd-bd} \\ + \frac{4c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{4c}{bd^3-bdd} \\ \&c. &\propto \&c. \end{aligned}$$

H $\propto \frac{cd^3}{b \text{ in } C: d-1}$ quando-
quidem hæc series ad
præced. $\frac{c}{bd} + \frac{2c}{bdd} +$
 $\frac{3c}{bd^3} \&c. \propto \frac{cd}{b \text{ in } Q: d-1}$ se
habeat ut dd ad $d-1$.

3. Si Numeratores sunt juxta Pyramidales :

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores progrediuntur juxta Trigonaes, quæque ad præcedentem seriem se habet, ut d ad $d-1$; unde summa ejus invenitur $\propto \frac{cd^4}{b \text{ in } Q: d-1}$. Generaliter, si propositæ seriei numeratores sint juxta figuratos cujuslibet gradus, ejus summa se habebit ad summam similis seriei gradus præcedentis, ut d ad $d-1$: unde reliquarum omnium summam invenire proclive admodum est.

4. Si Numeratores sunt juxta Quadratos :

Series L resolvitur in aliam M , cujus numeratores sunt Arithmetice progressionales, adeoque juxta primam hypothesein:

$$L \propto \frac{c}{b} + \frac{4c}{bd} + \frac{9c}{bdd} + \frac{16c}{bd^3} \&c.$$

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bdd} + \frac{c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{cd}{bd-b} \\ + \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{3c}{bd-b} \\ + \frac{5c}{bdd} + \frac{5c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{5c}{bdd-bd} \\ + \frac{7c}{bd^3} \&c. &\propto \frac{7c}{bd^3-bdd} \\ \&c. &\propto \&c. \end{aligned}$$

M $\propto \frac{cdd}{b \text{ in } Q: d-1} + \frac{2cdd}{b \text{ in } C: d-1}$
 $\propto \frac{cd^3 + cdd}{b \text{ in } C: d-1}$

Handwritten:
 $\frac{cd}{bd-b} + \frac{3c}{bd} + \frac{3c}{bdd} + \frac{3c}{bd^3} + \dots = H$
 $\frac{cd}{bd-b} + \frac{2c}{bd-b} + \frac{3c}{bd^2-bd} + \frac{4c}{bd^3-bd^2} + \dots = H$
 $\frac{cd}{bd-b} + \frac{2c}{bd-b} + \frac{3c}{bd^2-bd} + \dots = H$

5. Si Numeratores sunt juxta Cubos :

Series resolvitur in aliam, cujus numeratores sunt Trigonalium sextupli unitate aucti; unde ejus summa juxta secundam hypothesein

5. $\frac{c}{b} + \frac{8c}{bd} + \frac{27c}{bd^2} + \frac{64c}{bd^3} \&c. = \frac{c}{b} + \frac{c}{bd} + \frac{c}{bd^2} + \frac{c}{bd^3} = \frac{cd}{bd-b}$
 $+ \frac{7c}{bd} + \frac{7c}{bd^2} + \frac{7c}{bd^3} \&c. = \frac{7c}{bd-b}$
 $+ \frac{19c}{bd^2} + \frac{19c}{bd^3} \&c. = \frac{19c}{bd^2-bd}$
 $+ \frac{37c}{bd^3} \&c. = \frac{37c}{bd^3-bd^2}$

I N F I N I T I S.

fin invenitur $\frac{cdd}{b \text{ in } Q: d-1} + \frac{6cd3}{b \text{ in } QQ: d-1} \infty \frac{cd4 + 4cd3 + cdd}{b \text{ in } QQ: d-1}$. Exempli loco sint series sequentes, Numeratorum

Naturalium	$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} \&c. \infty 2$
Trigonalium	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{6}{8} + \frac{10}{16} + \frac{15}{32} \&c. \infty 4$
Pyramidalium	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{8} + \frac{20}{16} + \frac{35}{32} \&c. \infty 8$
Quadratorum	$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} \&c. \infty 6$
Cuborum	$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \frac{125}{32} \&c. \infty 26$

Coroll. Patet, in omnibus hujusmodi seriebus postremos terminos in nihilum desinere, & evanescere debere (quod ipsum jam præced. Propos. de earum una ex abundantanti ostendimus;) cum alias illarum summæ finitæ esse non possent.

XV. *Invenire summam seriei infinitæ fractionum R, quarum numeratores constituunt seriem equalium, denominatores vero Trigonalium, eorumve æquemultiplicium.*

Si à serie harmonicè proportionalium N, eademmet multata primo termino P subtrahatur, exoritur nova series Q, cujus denominatores Trigonalium dupli sunt, cujusque adeo summa æqualis erit ipsi primo termino seriei Harmonicæ N, per Ax. 3.

Operatio talis: A serie N	$\infty \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} \&c.$
subtracta series P	$\infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \frac{a}{5c} + \frac{a}{6c} \&c. \infty N - \frac{a}{c}$
relinquit seriem Q	$\infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \&c. \infty \frac{a}{c}$
cujus duplum R	$\infty \frac{a}{c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{10c} + \frac{a}{15c} \&c. \infty \frac{2a}{c}$

series scil. fractionum proposita, quarum denominatores sunt numeri Trigonales, eorumve æque-multiplices.

Observandum tamen, non sine cautela hac utendum esse methodo: Nam si à sequente serie S eadem demto primo termino T subtrahatur, prodibit series Q, quæ antea; nec tamen inde sequitur, summam seriei Q, æqualem esse primo termino seriei S $\infty \frac{2a}{c}$. Cujus rei ratio est, quod, si à serie S subtrahitur series ter-

I i minorum

$\frac{cd}{bd-b} + \frac{7c}{bd-b} + \frac{19c}{bd^2-bd} + \frac{37c}{bd^3-bd^2}$
 $\frac{cd}{bd-b} + \frac{c}{bd-b} + \frac{c}{bd^2-bd} + \frac{c}{bd^3-bd^2}$
 249 $+ \frac{6c}{bd-b} + \frac{18c}{bd^2-bd} + \frac{36c}{bd^3-bd^2}$
sed prior pars = $\sqrt{x}d(n.1) = \frac{cd^2}{b \times d-1} 2$; posterior = $\frac{6cd^3}{d-1} (n.2) = \frac{6cd^3}{b \times d-1} 4$
ergo.

minorum totidem T , in qua singuli termini postremum præcedentes singulos primum consequentes in altera destruant, residuum, hoc est resultans series Q , evidenter debet adæquari primo termino seriei S minus ultimo ipsius T ; adeoque ipsi primo seriei S absolute æqualis esse nequit, nisi tum cum ultimus ipsius T in nihilum desinit, uti quidem desinere perspicuum est in serie P vel N : at non evanescit pariter in serie T vel S , verum est $\infty \frac{a}{c}$, per X . Quin itaque potius summa seriei $Q \infty \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \infty \frac{a}{c}$, ut supra.

$$S \infty \frac{2a}{c} + \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} \&c.$$

$$T \infty \frac{3a}{2c} + \frac{4a}{3c} + \frac{5a}{4c} + \frac{6a}{5c} + \frac{7a}{6c} \&c.$$

$$Q \infty \frac{a}{2c} + \frac{a}{6c} + \frac{a}{12c} + \frac{a}{20c} + \frac{a}{30c} \&c. \infty \frac{2a}{c} - \frac{a}{c} \infty \frac{a}{c}.$$

XVI. Summa seriei infinita harmonicè progressionalium, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c.$ est infinita.

Id primus deprehendit Frater: inventa namque per præced. summa seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$, &c. visurus porro, quid emergeret ex ista serie, $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30}$, &c. si resolveretur methode Prop. XIV. collegit propositionis veritatem ex absurditate manifesta, quæ sequeretur, si summa seriei harmonicæ finita statueretur. Animadvertit enim,

Seriem $A, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}, \&c. \infty$ (fractionibus singulis in alias, quarum numeratores sunt 1, 2, 3, 4, &c. transmutatis)

seriei $B, \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} + \frac{5}{30} + \frac{6}{42}, \&c. \infty C + D + E + F, \&c.$

$$\left. \begin{aligned} C. & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \&c. \infty \text{ per præc. } \frac{1}{1} \\ D. & \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \&c. \infty C - \frac{1}{2} \infty \frac{1}{2} \\ E. & \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \&c. \infty D - \frac{1}{6} \infty \frac{1}{3} \\ F. & \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}, \&c. \infty E - \frac{1}{12} \infty \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \infty G; \text{ unde sequitur, se-} \\ \&c. \infty \quad \&c. \infty$$

(riem $G \infty A$, totum parti, si summa finita esset.

Ego

Ego postmodum, cum indicasset, idem ostensivè hunc in modum: Summa seriei infinitæ harmonicæ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, &c. superat datum quemvis numerum. Ergo infinita est, per II. Esto datus numerus N quantumcunque magnus: Abscinde à principio seriei aliquot terminos, quorum summa æquet vel superet unam unitatem numeri N , & à serie reliqua iterum aliquos abscinde, quorum summa aliam unitatem numeri N superet, idque si fieri possit repete toties, quot in numero N sunt unitates; sic termini abscissi omnes superabunt totum numerum, multo magis igitur tota series eundem superabit. Si neges, abscissis aliquot reliquos unitatem superare posse, esto primus reliquorum, qui post abscissionem ultimam remanserunt, $\frac{1}{a}$, & sequentes $\frac{1}{a+1}$, $\frac{1}{a+2}$, $\frac{1}{a+3}$, &c. Constituatur ad duos primos terminos $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{a+1}$ Progressio Geometrica, cujus ideo singuli post secundum termini singulis respondentibus in Progressione Harmonica minores sunt ob denominatores majores, per IV. & continuetur hæc usque ad $\frac{1}{aa}$ (quod quidem fiet in terminis numero finitis propter a numerum finitum) eritque hæc series Geometrica finita $\infty 1$, per VIII. Harmonica itaque terminorum totidem superabit unitatem. Q. E. D.

Coroll. 1. In proposita serie initio sumto à quolibet termino, erunt ab illo deinceps omnes, usque ad illum, cujus locus designatur per quadratum numeri ordinis primi termini, simul sumti unitate majores: sic termini à 2^{do} ad 4^{tum} usque unitatem superant, hinc à 5^{to} ad 25^{tum}, hinc à 26 ad 676 (Q: 26) hinc à 677 ad 458329 (Q: 677) &c. Nam in Geometrica progressionem termini his limitibus intercepti unitatem æquant; ergo in Harmonica superant, ubi & plures intercipiuntur & majores; majores quidem uti vidimus; plures, quia denominatores terminorum, cum sint minores quàm in Geometrica per IV. tardiùs illos limites assequuntur.

2. Patet, omnem aliam seriem harmonicam infinitam, summam quoque exhibere infinitam; ut ex. gr. si loco $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ &c. proponatur $\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{4000}$ &c. ubi singuli termini sin-

I i 2

gulorum

gulorum sibi respondentium in altera, adeoque & omnes omnium, sunt submillecupli: nam infiniti pars millesima & ipsa infinita est.

3. Summa seriei infinitæ, cujus postremus terminus evanescit, quandoque finita est, quandoque infinita.

4. Sequitur etiam, si modo in Geometriam saltum facere permissum est, spatium Curva Hyperbolica & Asymptotis comprehensum infinitum esse: Secta intelligatur Asymptotos linea à centro A in partes æquales infinitas in punctis B, C, D, E, &c. è quibus ad curvam educantur rectæ totidem alteri Asymptotôn parallelæ BM, CN, DO, EP, &c. & compleantur parallelogramma AM, BN, CO, DP, &c. quæ ob basium æqualitatem inter se erunt, ut altitudines, seu ut rectæ BM, CN, DO, EP, &c. hoc est, ut $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \&c.$ ex natura Hyperbolæ; cum igitur summa $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \&c.$ infinita ostensa sit, erit & summa Parallelogrammorum AM, BN, CO, DP, &c. infinita, multoque magis spatium Hyperbolicum, quod Parallelogrammis illis circumscriptum est.

*Voce huc inscrip-
tum Hyperbolæ
Parallelogram-
mum s, h'os ipsa
infinite parva
(cui reliqua om-
nes æquales sunt)
et ordinata
y, erit 1 = x
(p. 61. L'Hospital
con. sec.) seu
 $\frac{1}{x} = y$; exponatur
jam x per 1, 2, 3,
4, &c in inf.
erunt omnes
 $y = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \&c.$
respective.*

XVII. Invenire summam serierum Leibnitzianarum, D. H. I. aliarum- que quarum denominatores sunt numeri Quadrati aut Trigonaes, minuti aliis Quadratis vel Trigonalibus.

Cel. Leibnitius occasione mirabilis suæ Quadraturæ Circuli in principio Actorum Lips. publicatæ, mentionem injicit summæ quarundam serierum infinitarum, quarum denominatores constituunt seriem quadratorum unitate minorum, dissimulato quo eam repererat artificio. En breviter totum mysterium:

A serie A $\infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c.$ subtrahatur ipsamet demtis duobus primis terminis, B $\infty \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c. \infty A - \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

relinquitur C $\infty \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} \&c. \infty A - B \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \infty \frac{3}{2}$
& propterea D $\infty \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} \&c. \infty \frac{1}{2} C \infty \frac{3}{4}$

A serie E $\infty \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \&c.$ subtrahatur eadem demto primo termino, F $\infty \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \&c. \infty E - 1$

relin-

relinquitur $G \infty \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} \&c. \infty E - F \infty 1$
 & propterea . . . $H \infty \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} \&c. \infty \frac{1}{2} G \infty \frac{1}{2},$

& proinde etiam $I \infty \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} \&c. \infty D - H \infty \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \infty \frac{1}{4}$

Quod ipsum quoque sic ostenditur :

A serie . . . $L \infty \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \&c.$ subtrahatur eadem demto primo

termino , . . . $M \infty \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \&c. \infty L - \frac{1}{2}$

relinquitur . . . $N \infty \frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120} \&c. \infty L - M \infty \frac{1}{2}$

& proinde . . . $I \infty \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} \&c. \infty \frac{1}{2} N \infty \frac{1}{4}$, ut antea.

Memorable autem prorsus est, quod summa seriei $D, \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} \&c.$ (cujus denominatores sunt numeri quadrati 4, 9, 16, 25, 36, &c. unitate minuti) invenitur. $\frac{3}{4}$, quin & excerptis per saltum alternis terminis, summa seriei $H, \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} \&c. \infty \frac{1}{2}$; at si ex hac iterum simplici saltu terminos loco pari positos excerptas, ut relinquatur $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} \&c.$ ejus seriei infinitæ summa est vera magnitudo circuli nullo numero exprimibilis, sumto vid. quadrato diametri $\infty \frac{1}{2}$.

v. Cor. 45 Prop. pag. 279

Cæterum generaliter invenire possumus summam cujuslibet seriei, cujus numeratores constituunt seriem æqualium, & denominatores seriem quadratorum minorum communi aliquo quadrato Q . aut etiam seriem Trigonalium minorum communi aliquo numero Trigonalis T : si observemus, ejusmodi series nasci per subtractionem seriei harmonicæ truncatæ ab initio tot terminis (quot indicat ibi duplum radicis quadratæ communis quadrati Q , hinc duplum unitate auctum radicis-trigonalis numeri trigonalis T) à se ipsa integra :

Ex.gr. ad inveniendam summam seriei $D, \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} \&c.$ cujus denominatores sunt quadrati, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c. minuti communi Quadrato $Q. . . 9, 9, 9, 9, 9, 9.$ (cujus Radix $Q. 3$, & duplum 6.) $7, 16, 27, 40, 55, 72, \&c.$

I i 3

A serie

A serie $A \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \&c.$ subtrahatur
eadem multata sex

primis terminis . . . $B \propto \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \&c.$

relinquitur . . . $C \propto \frac{6}{7} + \frac{6}{16} + \frac{6}{27} + \frac{6}{40} + \frac{6}{55} + \frac{6}{72} \&c. \propto A - B \propto$
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \propto 2 \frac{2}{20}$

adeoque $D \propto \frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \frac{1}{55} + \frac{1}{72} \&c. \propto \frac{1}{6} C \propto \frac{49}{120}$

Rursus pro invenienda summa seriei E, $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} \&c.$

cujus denominatores sunt Trigonales 10, 15, 21, 28, 36, 45, &c.

minuti communi Trigonalis $T 6, 6, 6, 6, 6, 6, \&c.$

(cujus Radix Trigon. 3. & duplum 4, 9, 15, 22, 30, 39, &c.
unitate auctum 7)

A serie $A \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \&c.$ subtrahatur ea-
dem truncata septem primis terminis

$F \propto \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \&c.$

relinquitur $G \propto \frac{7}{8} + \frac{7}{18} + \frac{7}{30} + \frac{7}{44} + \frac{7}{60} + \frac{7}{78} + \frac{7}{98} \&c. \propto A - F \propto$
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \propto \frac{363}{140}$

adeoque . . . $E \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{22} + \frac{1}{30} + \frac{1}{39} + \frac{1}{49} \&c. \propto \frac{2}{7} G \propto \frac{363}{490}$

Atque ita per hanc Propositionem inveniri possunt summæ se-
rierum, cum denominatores sunt vel numeri Trigonales minuti
alio Trigonalis, vel Quadrati minuti alio Quadrato; ut & per XV.
quando sunt puri Trigonales, ut in serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \&c.$
at, quod notatu dignum, quando sunt puri Quadrati, ut in serie
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \&c.$ difficilior est, quàm quis expectaverit,
summæ pervestigatio, quam tamen finitam esse, ex altera, qua mani-
festo minor est, colligimus: Si quis inveniat nobisque communicet,
quod industriam nostram elusit hætenus, magnas de nobis gratias
feret.

Hoc saltem monere adhuc liceat, quod spatium Hyperboloide
Cubicali (cujus natura exprimitur per æquationem $xy \propto aab$, hoc
est, in qua Quadrata abscissarum ex Asymptotis sunt in applicatarum
ratione

$$\frac{1}{x^2} = y$$

ratione reciproca,) & Asymptotis suis comprehensum, eodem modo ex finita hujus seriei summa finitum esse demonstrari possit, quo simile spatium in ipsi Hyperbola ex infinita seriei Harmonicæ summa infinitum ostensum est.

XVIII. *Invenire summam seriei infinitæ reciprocæ numerorum Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyramidi-Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum: atque infinitarum summam summam.*

1. Quemadmodum si à serie fractionum harmonicè progressionalium, hoc est, serie reciproca numerorum naturalium A, eadem multata primo termino subtrahatur, nascitur series fractionum, quarum numeratores sunt *unitates*, denominatores *trigonalium dupli*; ut patet ex demonstr. XV. Ita si à serie reciproca trigonalium B, eadem truncata primo termino subducatur, exoritur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros naturales 2. 3. 4. 5. &c. sed quæ reducuntur ad fractiones, quarum omnium numeratores sunt *binarii*, denominatores vero *pyramidalium tripli*; unde ipsa series ad seriem reciprocam pyramidalium C, ut $\frac{2}{3}$ ad 1. Pariter si à serie hac reciproca pyramidalium, ipsamet mutilata primo termino subducatur, relinquitur series fractionum, quarum numeratores progrediuntur juxta numeros trigonales 3. 6. 10. 15. &c. sed quæ reduci possunt ad alias, quarum numeratores omnes sunt *ternarii*, denominatores vero *trianguli-pyramidalium quadrupli*, unde ipsa series ad seriem reciprocam trianguli-pyramidalium D, ut $\frac{3}{4}$ ad 1: Et sic deinceps in infinitum. Quocirca cum singulæ hæc per subtractionem genitæ series, quarum numeratores sunt unitatum, denominatores figuratorum multipli, per Ax. 3. æquipolleant unitati, ipsæ figuratorum series reciprocæ ordine dabunt summas, ut sequitur:

- A. Natur. $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \text{ \&c. } \infty \frac{1}{6} \infty 1\frac{1}{6}$, per XVI.
- B. Trigon. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \text{ \&c. } \infty \frac{2}{1} \infty 1\frac{1}{1}$, per XV.
- C. Pyramid. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} + \frac{1}{56} \text{ \&c. } \infty \frac{3}{2} \infty 1\frac{1}{2}$.
- D. Triang. Pyr. $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} + \frac{1}{126} \text{ \&c. } \infty \frac{4}{3} \infty 1\frac{1}{3}$.
- E. Pyr. Pyr. $\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{56} + \frac{1}{126} + \frac{1}{352} \text{ \&c. } \infty \frac{5}{4} \infty 1\frac{1}{4}$.

2. Sum-

2. Summæ hæ à secunda ferie ordine collectæ sunt $1\frac{1}{1}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \&c.$ unde summa summarum est $1\frac{1}{1} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{4} + \&c.$ quæ infinita est: quin & demtis singularum ferierum primis terminis seu unitatibus, summa fit $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$ quæ itidem infinita existit, per XVI. at demtis insuper secundis terminis $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \&c.$ summa evadit finita & æqualis $1 + \frac{1}{2} \infty \frac{3}{2}$ per Axiom. 3.

nempe demtis a singulis duobus primis terminis, relinquitur summa seriei B = 2/3, C = 2/6, D = 2/15, E = 2/24, sed 2/3 + 2/6 + 2/15 + 2/24 = 2D (p. 252) = 3/2. vid. Wallisij Arithmetica Intinuit. prop. 178. &c. oriuntur hi numeri ex continua multiplicatione Quantitatum 1/1 x 2/2 x 3/3 x 4/4 x &c. isti:

XIX. Invenire summam seriei finite reciproce Trigonalium, Pyramidalium, Trianguli-Pyramidalium, Pyram. Pyramidalium, & figuratorum altioris cujusvis gradus in infinitum.

Posito in qualibet ferie numero terminorum n , postremi termini in seriebus directis numerorum naturalium, trigon. pyramid. (*per ea quæ demonstrabuntur alibi) sunt ordine hi, qui sequuntur: (denotantibus hîc & ubique punctulis continuam multiplicationem quantitatum, quibus interferuntur.)

$$n, \frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \&c.$$

& qui hos immediatè excipiunt, sunt isti:

$$n + 1, \frac{n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2}, \frac{n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \cdot n + 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \&c.$$

propterea erunt ultimi termini in eorundem seriebus reciprocis

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n \cdot n + 1}, \frac{1}{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}, \frac{1}{n \cdot n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}, \&c.$$

& qui hos immediatè sequuntur,

$$\frac{1}{n + 1}, \frac{1}{n + 1 \cdot n + 2}, \frac{1}{n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3}, \frac{1}{n + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 3 \cdot n + 4}, \&c.$$

Jam si à qualibet ferie reciproca eadem ipsa truncata ab initio & aucta in fine uno termino methodo Prop. XV. subtrahatur, subducto sigillatim secundo termino à primo, tertio à secundo, sequente ultimum ab ultimo, nascitur series terminorum totidem, quæ per ea quæ in præced. Propos. dicta sunt, seriei reciproce figuratorum gradus sequentis aut subdupla est, aut subsesquialtera, aut subsesquitertia, &c. atque insuper per observata Propos. XV. æqualis primo termino minus sequente ultimum ejus seriei, per cujus subductionem nata fuit: unde ipsa summa seriei finitæ reciproce figuratorum quorumcunque obtinetur facile, ut sequitur: B, Tri-

B. Trigon. $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \&c.$ usque ad $\frac{1 \cdot 2}{n \cdot n+1} \infty \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}$ in nempe $\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \times 2$
 $\frac{1}{n+1} \infty \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}$ ob rationem subdou-
 plam; $\frac{1}{1} - \frac{1 \times 2}{n+1 \times n+2} \times 3$
 C. Pyram. $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \&c.$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n \cdot n+1 \cdot n+2} \infty \frac{3}{2} - \frac{3}{n+2}$ in ob rationem sub-
 $\frac{1 \cdot 2}{n+1 \cdot n+2} \infty \frac{3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2}$ sesquialteram;
 D. Δ . Pyr. $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} \&c.$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n \cdot n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} \infty \frac{4}{3} - \frac{4}{n+3}$ in etc.
 $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} \infty \frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}$
 E. Py. Pyr. $\frac{1}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} \&c.$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{n \cdot n+1 \cdot \dots \cdot n+4} \infty \frac{5}{4} - \frac{5}{n+4}$ in
 $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n+1 \cdot \dots \cdot n+4} \infty \frac{5}{4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{n+1 \cdot \dots \cdot n+4}$

XX. Invenire summam seriei infinitæ reciproæ Trigonaliæ, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. multata terminis initialibus quotlibet: & infinitarum summarum summam.

1. Summa seriei infinitæ integræ Trigonaliæ, Pyramidalium, Triang. Pyramidalium, &c. est $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \&c.$ per XVIII. si ex unaquaque serie ab initio abscindantur n termini, summa abscissorum est $\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}, \frac{3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2}, \frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}, \frac{5}{4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4}, \&c.$ per XIX. subtracta ergo hac à summa omnium, erit summa reliquorum $\frac{2}{n+1}, \frac{1 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4}, \&c.$

2. Summa serierum omnium mutilatarum seu nullo seu uno termino est infinita, duobus terminis est $\frac{3}{2}$ per XVIII. Hinc si demas tertios terminos (qui constituunt seriem trigonaliæ B truncatam duobus terminis, cujus summa per eandem est $\frac{2}{3}$) erit reliquorum omnium summa $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \infty \frac{5}{6} \infty \frac{5}{2 \cdot 3}$. Hinc denuo si quartos terminos auferas (qui formant seriem pyramidalium C itidem truncatam duobus terminis, summamque proin per præced. efficiunt $\frac{2}{3}$)

K k

relin-

relinquetur cæterorum omnium summa $\frac{5}{6} - \frac{2}{8} \infty \frac{7}{12} \infty \frac{7}{3 \cdot 4}$. Hinc iterum si quintos terminos refeces, exhibit cæterorum summa $\frac{9}{4 \cdot 5}$; si sextos, $\frac{11}{5 \cdot 6}$; septimos, $\frac{13}{6 \cdot 7}$; &c. adeoque universaliter si ex unaquaque serie tollantur n termini, erit mutilatarum ita serierum omnium summa reliqua $\frac{2n-1}{n-1 \cdot n}$.

Coroll. Series $\frac{2}{n+1} + \frac{1 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4} + \&c.$ five, $\frac{2}{1}$ in $\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2}$ in $\frac{1 \cdot 2}{n+1 \cdot n+2} + \frac{4}{3}$ in $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3} + \frac{5}{4}$ in $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{n+1 \cdot n+2 \cdot n+3 \cdot n+4} + \&c. \infty \frac{2n-1}{n-1 \cdot n}$. Singula enim seriei hujus membra singulas figuratarum serierum mutilatarum summas exprimunt, per 1. part. hujus; adeoque & omnia omnium.

XXI. Seriei hujus, $\frac{1a}{1 \cdot 2} + \frac{2a}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c.$ hoc est, $\frac{a}{2} + \frac{a}{1 \cdot 3} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \&c.$ summam invenire.

Series hæc nascitur subductione sequentis seriei, $\frac{a}{1} + \frac{a}{1 \cdot 2} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$ multatæ primo termino à seipsa integra, methodo Prop. XV. quare ejus summa ∞a , primo sc. termino hujus, per Axioma 3.

Coroll. Hinc $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. (\infty F + G + H + I + \&c.) \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$

Nam F. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. \infty \frac{1}{1}$ per XXI.
 G. $-\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. \infty F - \frac{1}{1 \cdot 2} \infty \frac{1}{1 \cdot 2}$
 H. $-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. \infty G - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \infty \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
 I. $-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \&c. \infty H - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \infty \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

XXII.

XXII. Invenire summas serierum K, L, M, N, quarum numeratores sunt arithmetice progressionales, denominatores Trigonalium integrorum aut Quadratorum unitate minorum quadrata.

$$K \infty \frac{3}{\square_1} + \frac{5}{\square_3} + \frac{7}{\square_6} + \frac{9}{\square_{10}} + \frac{11}{\square_{15}} + \frac{13}{\square_{21}} + \&c.$$

$$L \infty \frac{2}{\square_3} + \frac{3}{\square_8} + \frac{4}{\square_{15}} + \frac{5}{\square_{24}} + \frac{6}{\square_{35}} + \frac{7}{\square_{48}} + \&c.$$

$$M \infty \frac{1}{\square_3} + \frac{2}{\square_{15}} + \frac{3}{\square_{35}} + \frac{4}{\square_{63}} + \frac{5}{\square_{99}} + \frac{6}{\square_{143}} + \&c.$$

$$N \infty \frac{3}{\square_3} + \frac{5}{\square_{24}} + \frac{7}{\square_{48}} + \frac{9}{\square_{80}} + \frac{11}{\square_{120}} + \frac{13}{\square_{168}} + \&c.$$

Per subductionem seriei $\frac{1}{\square_1} + \frac{1}{\square_2} + \frac{1}{\square_3} + \frac{1}{\square_4} + \frac{1}{\square_5} + \frac{1}{\square_6} + \&c.$ mutilatae primo termino à seipsa integra nascitur series aliqua, cujus termini sunt subquadrupli terminorum respondentium seriei K; unde per Ax. 3. series K $\infty 4$ in $\frac{1}{\square_1} \infty 4$.

Per subductionem vero ejusdem seriei mutilatae duobus primis terminis à seipsa integra oritur series, quae quadrupla est seriei L; unde per id. Ax. series L $\infty \frac{1}{4}$ in $\frac{1}{\square_1} + \frac{1}{\square_2} \infty \frac{5}{16}$.

Denique per subductionem seriei $\frac{1}{\square_1} + \frac{1}{\square_3} + \frac{1}{\square_5} + \frac{1}{\square_7} + \frac{1}{\square_9} + \&c.$ multatae primo termino à seipsa integra emergit alia, quae octupla est seriei M, quare per 3. Ax. series M $\infty \frac{1}{8}$ in $\frac{1}{\square_1} \infty \frac{1}{8}$; & propterea duplum seriei M, hoc est, omnes termini locorum imparium seriei L $\infty \frac{1}{4}$; adeoque reliqui termini ejusdem seriei, hoc est, ipsa series N $\infty \frac{5}{16} - \frac{1}{4} \infty \frac{1}{16}$.

XXIII. Invenire summas serierum Q & R, item V & X, &c. quarum denominatores sunt termini integri progressionis quadrupla, noncupla, &c. numeratores vero termini progressionis dupla, tripla, &c. unitate tum minuti, tum aucti.

Operatio talis :

$$\left. \begin{array}{l} Q \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \&c. \infty 2 \\ P \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. \infty \frac{4}{3} \end{array} \right\} \text{ per Cor. VIII.}$$

$$\begin{aligned}
 Q &\infty \frac{1-1000}{1} + \frac{2-1001}{4} + \frac{4-1003}{16} + \frac{8-1007}{64} + \frac{16-1015}{256} + \&c. \infty O - P \infty 2 - \frac{4}{3} \infty \frac{2}{3} \\
 R &\infty \frac{1+1002}{1} + \frac{2+1003}{4} + \frac{4+1005}{16} + \frac{8+1009}{64} + \frac{16+1017}{256} + \&c. \infty O + P \infty 2 + \frac{4}{3} \infty \frac{10}{3} \\
 S &\infty \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \&c. \infty \frac{3}{2} \\
 T &\infty \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{6561} + \&c. \infty \frac{9}{8} \\
 V &\infty \frac{1-1000}{1} + \frac{5-1002}{9} + \frac{9-1008}{81} + \frac{27-1026}{729} + \frac{81-1080}{6561} + \&c. \infty S - T \infty \frac{3}{2} - \frac{9}{8} \infty \frac{3}{8} \\
 X &\infty \frac{1+1002}{1} + \frac{5+1004}{9} + \frac{9+1010}{81} + \frac{27+1028}{729} + \frac{81+1082}{6561} + \&c. \infty S + T \infty \frac{3}{2} + \frac{9}{8} \infty \frac{21}{8}
 \end{aligned}$$

per Corol. VIII.

Idem inveniri potest, resolvendo series propositas Q, R; V & X metho Prop. XIV. Exempli loco esto series

$$Q \infty \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{7}{64} + \frac{15}{256} + \&c. \infty Y + Z + \Pi + \Sigma + \&c.$$

$$Y \infty \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \&c. \infty \text{ per Coroll. VIII. } \frac{1}{3}$$

$$Z \infty - - + \frac{2}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{256} + \&c. \infty 2 Y - \frac{2}{4} \infty \frac{2}{3} - \frac{2}{4} \infty \frac{1}{6}$$

$$\Pi \infty - - - + \frac{4}{64} + \frac{4}{256} + \&c. \infty 2 Z - \frac{4}{16} \infty \frac{2}{6} - \frac{4}{16} \infty \frac{1}{12}$$

$$\Sigma \infty - - - - + \frac{8}{256} + \&c. \infty 2 \Pi - \frac{8}{64} \infty \frac{2}{12} - \frac{8}{64} \infty \frac{1}{24}$$

$$\&c. \infty - - - - - \&c. - - - - - \infty \&c.$$

$\frac{2}{3}$ per Coroll. VIII.

XXIV. In serie quavis infinita, cujus numeratores omnes sunt aequales, denominatores vel numeri naturales, vel eorundem quadrata, cubi, aut alia quaecunque potestas, summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam omnium in paribus, ut similis potestas binarii unitate mutata ad unitatem.

Putà in numeris naturalibus, ut 1 ad 1; in quadratis ut 3 ad 1; in cubis ut 7 ad 1; in biquadratis ut 15 ad 1; &c.

Modus investigandi talis:

In Numeris Naturalibus:

Series ista $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \&c.$ aequatur suis partibus, videl. seriebus A + B + C + D + &c.

$$A \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c. \infty \frac{2}{1}$$

$$B \infty \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \&c. \infty \frac{2}{3}$$

$$C \infty \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \&c. \infty \frac{2}{5}$$

$$D \infty \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56} + \&c. \infty \frac{2}{7}$$

Est ergo $\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \&c.$ aequalis, ideoque $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c.$ dimidia seriei propositae $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$

per Cor. VIII.

$\frac{1}{2} + \&c.$ hoc est, summa terminorum in locis imparibus dimidia seriei totius, & proinde æqualis summæ reliquorum $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \&c.$

Patec hinc rursum veritas Prop. XVI. cum enim $\frac{1}{1} > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \frac{1}{5} > \frac{1}{6}, \&c.$ erit $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \&c. > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \&c.$ cui tamen æqualis modo ostensa est; quæ utique conciliari nequeunt, nisi summa utriusque seriei statuatur infinita, hoc est, tanta ut quæ inter illas intercedit differentia, rationem æqualitatis destruire non possit.

In Numeris Quadratis :

Series $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \&c. \propto E + F + G + H + \&c.$

$E \propto$	$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \&c.$	\propto	$\frac{4}{3 \cdot 1}$	}	per Cor. VIII.
$F \propto$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{144} + \frac{1}{576} + \&c.$	\propto	$\frac{4}{3 \cdot 9}$		
$G \propto$	$\frac{1}{25} + \frac{1}{100} + \frac{1}{400} + \frac{1}{1600} + \&c.$	\propto	$\frac{4}{3 \cdot 25}$		
$H \propto$	$\frac{1}{49} + \frac{1}{196} + \frac{1}{784} + \frac{1}{3136} + \&c.$	\propto	$\frac{4}{3 \cdot 49}$		

Est ergo $\frac{4}{3 \cdot 1} + \frac{4}{3 \cdot 9} + \frac{4}{3 \cdot 25} + \frac{4}{3 \cdot 49} + \&c. \propto \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.$ adeoque prioris subsesquitercia, hoc est, $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$ æqualis $\frac{3}{4}$ posterioris, hoc est, termini omnes locorum imparium in serie proposita constituunt tres quartas partes totius seriei, & reliqui unam: quare summa terminorum illorum ad summam horum, ut 3 ad 1.

Eadem investigandi methodus observetur in reliquis potestatibus.

Aliter & universaliter ita: $x \propto \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \&c.$

$y \propto \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \&c.$

$$x - y \infty + \frac{1}{2^m} \left(\frac{1}{2^m 1^m} \right) + \frac{1}{4^m} \left(\frac{1}{2^m 2^m} \right) + \frac{1}{6^m} \left(\frac{1}{2^m 3^m} \right) \&c.$$

$$2^m x - 2^m y \infty + \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} \&c. \infty x$$

unde $2^m x - x \infty 2^m y$, & $y \infty x - \frac{x}{2^m}$, & $x - y \infty \frac{x}{2^m}$, ergo y .

$$x - y :: x - \frac{x}{2^m} \cdot \frac{x}{2^m} :: 1 - \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^m} :: 2^m - 1. 1.$$

Schol. Liquet hinc, quod summæ duarum serierum (etiamsi incognitæ) possint ad se invicem habere rationem cognitam. vid. Prop. XVII. sub fin. Extendit se autem demonstratio ad potestatum radices sive ad potestates fractas non minus ac integras: sic ex. gr. colligimus, in serie $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{27}} + \frac{1}{\sqrt{64}} + \frac{1}{\sqrt{125}} + \&c.$ (ubi denominatores sunt cuborum radices quadratæ) omnes terminos locorum imparium ad omnes parium esse, ut $\sqrt{8} - 1$ ad 1. Mirabile verò est, quod in serie $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \&c.$ (cujus summa infinita est, ceu major serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$ ob denominatores minores) termini locorum imparium ad terminos parium juxta regulam inveniuntur habere rationem $\sqrt{2} - 1$ ad 1. minoris sc. ad majus, cum tamen illi cum his sigillatim collati iisdem manifesto sint majores: cujus *ἐναριθμοφανείας* rationem, etsi ex infiniti natura finito intellectui comprehendi non posse videatur, nos tamen satis perspectam habemus. Idem vero de similibus seriebus aliis, quæ infinitam summam habent, intelligendum.

XXV. *Seris Thesis* $X, \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} + \frac{a+2c}{b+2d} - \frac{a+3c}{b+3d};$ & alia Harmonica terminorum totidem & denominatorum eorundem, $\frac{f}{b} - \frac{f}{b+d} + \frac{f}{b+2d} - \frac{f}{b+3d};$ signis $+$ & $-$ alternatim se excipientibus, sumtoque $f \infty a - \frac{bc}{d}$, aequales summas habent.

Etenim

Etenim subtrahendo terminos locorum parium à terminis imparium, provenit eadem utrobique series, $\frac{ad-bc}{bb+bd} + \frac{ad-bc}{bb+5bd+6dd}$, sive $\frac{df}{bb+bd} + \frac{df}{bb+5bd+6dd}$, &c.

Esto ex.gr. series th. X. $\frac{3}{1} - \frac{5}{2} + \frac{7}{3} - \frac{9}{4} + \frac{11}{5} - \frac{13}{6}$, positoq; $f \infty 3 - 2 \infty 1$, series harmonica, $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$, erit

summa utriusque $\frac{x}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{30}$, per saltum excerpta ex serie Q. th. XV.

XXVI. Seriei infinita fractionum K (quarum denominatores crescunt progressionem Geometrica, hoc est, sequentes præcedentium sunt aque-multiplices exactè, numeratores verò præcedentium aque-multiplices aucti vel minuti communi quodam numero, summam ultimorumve terminum reperire.

(S denotat vel ubique + vel ubique -)

$$K \infty \frac{a}{c} + \frac{ab \ S \ d}{cm} + \frac{abb \ S \ bd \ S \ d}{cmm} + \frac{ab3 \ S \ bbd \ S \ bd \ S \ d}{cm3} + \frac{ab4 \ S \ b3d \ S \ bbd \ S \ bd \ S \ d}{cm4} + \&c.$$

1. Summa seriei invenitur, resolvendo illam methodo Prop. XIV. in series fractionum purè proportionalium L + M + N + O + P + &c.

$L \infty \frac{a}{c} + \frac{ab}{cm} + \frac{abb}{cmm} + \frac{ab3}{cm3} + \frac{ab4}{cm4} + \&c. \infty + \frac{am}{m-b:in\ c}$	}	per Cor. VIII.
$M \infty - \ S \ \frac{d}{cm} \ S \ \frac{bd}{cmm} \ S \ \frac{bbd}{cm3} \ S \ \frac{b3d}{cm4} \ S \ \&c. \infty \ S \ \frac{d}{m-b:in\ c}$		
$N \infty - - - \ S \ \frac{d}{cmm} \ S \ \frac{bd}{cm3} \ S \ \frac{bbd}{cm4} \ S \ \&c. \infty \ S \ \frac{d}{m-b:in\ mc}$		
$O \infty - - - - - \ S \ \frac{d}{cm3} \ S \ \frac{bd}{cm4} \ S \ \&c. \infty \ S \ \frac{d}{m-b:in\ mmc}$		
$P \infty - - - - - \ S \ \frac{d}{cm4} \ S \ \&c. \infty \ S \ \frac{d}{m-b:in\ m3c}$		
$\&c. \infty - - - - - \ S \ \&c. \infty \ S \ \&c.$		

Summæ serierum M, N, O, P, &c. novam progressionem Geometricam constituunt, cujus summa per Coroll. VIII. est

$\frac{md}{m-1:in\ m-b:in\ c}$, quæ summæ seriei L $\frac{am}{m-b:in\ c}$ addita vel subtrahita efficit $\frac{amm - am \ S \ md}{m-1:in\ m-b:in\ c}$ summam omnium serierum L, M, N, &c.

hoc est, ipsius seriei propositæ K,

2. Obser-

2. Observandum, si $m > b$, summam esse finitam, adeoque ultimum seriei terminum evanescere, vid. Cor. XIV.

Sin $m < b$, & summa infinita est, & ultimus quoque terminus est infinitus; tum enim singulae progressionis Geometricæ L, M, N, &c. sunt crescentes: confer Prop. V.

At existente $m \infty b$, summa quidem infinita est, sed postremus terminus finitus: tum enim surrogato m in locum b , secundus terminus fit $\frac{am \& d}{cm}$, hoc est, $\frac{a}{c} \& \frac{d}{cm}$: tertius $\frac{amm \& md \& d}{cmm}$, hoc est, $\frac{a}{c} \& \frac{d}{cm} \& \frac{d}{cmm}$: quartus $\frac{am^3 \& mmd \& md \& d}{cm^3}$, hoc est, $\frac{a}{c} \& \frac{d}{cm} \& \frac{d}{cmm} \& \frac{d}{cm^3}$: atque ita postremus $\frac{a}{c} \& \frac{d}{cm} \& \frac{d}{cmm} \& \frac{d}{cm^3} \& \frac{d}{cm^4} \& \&c.$ in infinitum: unde patet, terminum infinitesimum resolvi in $\frac{a}{c} \&$ serie infinitorum Geometricè progressionalium in ratione m ad 1, quorum summa per Cor. VIII. est $\frac{d}{m-1:in c}$, quæ ipsi $\frac{a}{c}$ addita vel subtracta efficit terminum infinitesimum $\frac{am-a \& d}{m-1:in c}$, cujus numerator differentiam numeratorum primi & secundi termini, uti & denominator denominatorum eorundem differentiam exprimit: quare cum ex Prop. X. manifestum sit, terminum ultimum hujus progressionis

$$Q \infty \frac{a}{c}, \frac{am \& d}{cm}, \frac{2am-a \& 2d}{2cm-c}, \frac{3am-2a \& 3d}{3cm-2c}, \frac{4am-3a \& 4d}{4cm-3c}, \&c.$$

$$\text{sive } \frac{a}{c}, \frac{a}{c} \& \frac{d}{cm}, \frac{a}{c} \& \frac{2d}{2cm-c}, \frac{a}{c} \& \frac{3d}{3cm-2c}, \frac{a}{c} \& \frac{4d}{4cm-3c}, \&c.$$

itidem esse $\frac{am-a \& d}{m-1:in c}$ sive $\frac{a}{c} \& \frac{d}{m-1:in c}$; sequitur in utraque progressionem K & Q, primis duobus terminis existentibus iisdem ultimos quoque esse pares, quamvis incrementa vel decremента prioris magis subitanea sint, quandoquidem ejus termini non nisi per saltum ex posteriore sunt excerpti: Invenio enim, quod memorabile est, tertium terminum seriei K convenire cum termino $m-2$, quartum cum $m-1$, quintum cum m , sextum cum $m+1$, septimum cum $m+2$ seriei Q, & sic deinceps; uti patere poterit ex subjunctis seriebus, ubi a valet 2, c 3, b vel m 3, & d 1.

$K \infty \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{67}{81}, \frac{202}{243}, \&c.$ ultimus $\frac{5}{6}$.

$Q \infty \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{12}{27}, \frac{17}{81}, \frac{22}{27}, \frac{27}{33}, \frac{32}{39}, \frac{37}{45}, \frac{42}{51}, \frac{47}{57}, \frac{52}{63}, \frac{57}{69}, \frac{62}{75}, \frac{67}{81}, \&c.$ ultimus $\frac{5}{6}$.

Intellige vero, quæ dicta sunt de summa ultimoque termino seriei K , si numeratores præcedentium sunt æque - multiplices aucti communi numero d ; vel diminuti quidem eodem numero, at insuper $ab > a + d$. Nam si sit $ab \infty a + d$, æquivalentur singuli numeratores ipsi a , summaque seriei fiet finita, nempe $\frac{a^m}{m-1: inc}$, & ultimus terminus evanescet, siue m existat \leftarrow vel ∞ ipsi b .

XXVII. Si dati cujuslibet numeri radix quadrata ducatur in ipsum numerum, & producti radix quadrata denuo ducatur in eundem, & producti hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: erit radix producti ultimi equalis ipsi dato numero: (putà, si datus numerus vocetur a , erit $\sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \&c. \infty a$.)

Pooatur enim $x \infty \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \&c.$ erit $xx \infty a \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \&c.$ & $\frac{xx}{a} \infty \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \&c. \infty x$: proinde $xx \infty ax$, & $x \infty a$. Q. E. D.

XXVIII. Si dati numeri cujuslibet radix quadrata addatur ipsi dato numero, & aggregati radix quadrata denuo addatur eidem, & aggregati hujus radix iterum iterumque; idque fiat continuo in infinitum: radix aggregati ultimi radicem dati numeri quarta parte unitatis aucti dimidia unitate superabit. (putà $\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \&c. \infty \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$.)

Posito enim $x \infty \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \&c.$ erit $xx \infty a + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \&c.$ & $xx - a \infty \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt{a} + \&c. \infty x$: proinde $xx \infty x + a$, & $x \infty \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}$. Q. E. D.

XXIX. Datis duobus numeris quibusvis, si radix quadrata unius ducatur in alterum, & producti radix quadrata in primum, & hujus producti radix in alterum; atque ita semper productorum radices ducantur alternatim in datorum alterum; idque continuetur in infinitum: erit radix producti ultimi equalis alterutri duorum mediorum proportionalium inter duos datos numeros (putà si dati numeri dicantur a & b , erit $\sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{a} \sqrt{b} \sqrt{a} \sqrt{b} \&c. \infty \sqrt{C. aab}$.)

150

Gregorio, Newtono, Leibnitio, in lucem productum fuit. Quid primi tres de his memoria prodiderint, etiamnum ignoramus. Summus Geometra Leibnitius, qui rem haud dubiè longissimè provexit, inter alias series, quas nobis in Actis Lips. impertivit, unam initio Actorum 1682. pro Circuli magnitudine dedit sed methodum, qua illuc pervenit, nusquam exposuit. Quantum conjicio, non differt illa à nostra; nam & in easdem cum ipso series incidimus & ipsius subinde calculo differentiali usi sumus, uti posthac patebit. Principia hujus calculi exponere nimis longum & alienum foret. Ea Vir perillustris D. Marchio Hospitalius in Libro de Analyti infinite parvorum nuperimè edito perspicuè tradit, ad quem proin Lectorem φιλομαθην remittimus.

Definitio :

MIxtam Seriem voco, cujus termini multiplicatione sunt conflati ex terminis ejusdem ordinis aliarum serierum. Ita si sint series $a, b, c, d, e, \&c.$ & $f, g, h, i, k, \&c.$ mixta ex utraque erit $af, bg, ch, di, ek, \&c.$

XXXVI.

Fractionem $\frac{l}{m-n}$ convertere in seriem infinitam quantitatum geometricè proportionalium.

Fit hoc per divisionem continuam numeratoris per denominatorem, hoc pacto: m in l habeo $\frac{l}{m}$, quod multiplicatum per divisorem $m-n$, & subtractum ex dividendo l relinquit $\frac{ln}{m}$; hoc rursus divisum per m facit $\frac{ln}{mm}$, quod ductum in $m-n$ & subtractum ex dividendi reliquo efficit residuum $\frac{lnn}{mm}$; hoc denuò divisum per m , facit $\frac{lnn}{m^3}$, quo ducto in $m-n$ & subtracto remanet $\frac{ln^3}{m^3}$, atque ita deinceps sine fine in infinitum: semper enim aliquid dividendum superest, cum unius membri dividendus à divisore bimembri nunquam sine residuo exauriri possit. At hoc residuum, continuata operatione positoque $m > n$, perpetuo decrescit, & tandem data quavis quantitate minus fit, ut patet. Est ergo fractio proposita

$\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \&c.$ quæ series est quantita-
tum geometricè progredientium in ratione m ad n ; quandoquidem
quilibet ejus terminus ex constructione in n ductus & per m divisus
proximè sequentem exhibet.

Idem brevius sic evincitur: Summa Progressionis Geometricæ
 $\frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \&c.$ est $\frac{l}{m-n}$, per Corollar. VIII.
Ergo reciprocè valorem fractionis $\frac{l}{m-n}$ per talem seriem exprimere
licet.

XXXVII. Fractionem $\frac{1}{m+n}$ resolvere in seriem infinitam geometricè
proportionalium.

Facta divisione continua numeratoris per denominatorem, ea-
dem resultat series, quæ antea, nisi quod termini ejus alterna-
tim fiant positivi & negativi. Est igitur quantitas $\frac{l}{m+n} \infty$
 $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \&c.$ saltem si ponatur $m > n$: tum
enim quod post singulas divisiones reliquum manet, continuo mi-
nuitur, donec continuata in infinitum operatione prorsus evanescat.

Idem quoque sic elucescit: Quoniam in serie quantitatum
 $\frac{l}{m}, \frac{ln}{mm}, \frac{lnn}{m^3}, \frac{ln^3}{m^4}, \frac{ln^4}{m^5} \&c.$ ex hyp. primus terminus est ad secun-
dum, ut tertius ad quartum, & quintus ad sextum &c. nec non
secundus ad tertium, ut quartus ad quintum, & sextus ad septi-
mum &c. erit etiam ex æquo, primus ad tertium, ut tertius ad
quintum, & quintus ad septimum &c. quod docet, primum, ter-
tium, quintum, septimum &c. terminos exemptis reliquis etiam
geometricè proportionales esse, quorum adeo summa per Corollar.
VIII. invenitur $\frac{lm}{m^m - n^m}$. Eodem pacto ostenditur, secundum,
quartum, sextum &c. terminos seriem geometricè proportiona-
lium efficere, ejus summa $\frac{ln}{m^m - n^m}$. Igitur differentia harum

Ll 3

duarum

duarum serierum, seu $\frac{l}{m} - \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} + \frac{ln^4}{m^5} \&c. \infty$
 $\frac{lm - ln}{mm - nn} \infty \frac{l}{m+n}$, ac propterea quantitas $\frac{l}{m+n}$ in istam seriem
 vicissim converti potest.

Coroll. 1. In omni Progressione Geometrica descendente (pri-
 mo termino existente determinato, signisque + & - alternatim
 se excipientibus) summa seriei limites habet, quos nequit attingere,
 nedum egredi, qualiscunque statuatur ratio progressionis. Cum
 enim per hyp. $n > 0$, & $< m$, erit $\frac{l}{m+n} < \frac{l}{m+0} = \frac{l}{m}$; & $> \frac{l}{m+m}$
 $= \frac{l}{2m}$, hoc est, valor seriei perpetuo minor est ipso primo termi-
 no, & major ejus semisse.

Coroll. 2. Si tamen $m \infty n$, fiet $\frac{l}{m+n} \infty \frac{l}{2m}$, & series $\frac{l}{m} -$
 $\frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} - \frac{ln^3}{m^4} \&c. \infty \frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} \&c.$ unde paradoxum
 fuit non inelegans, quod $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} \&c. \infty \frac{l}{2m}$. Etenim
 si ultimus seriei terminus signo - affectus concipiatur, termini
 omnes se mutuò destruere apparebunt, & si signo +, æquari vi-
 debuntur ipsi $\frac{l}{m}$, non $\frac{l}{2m}$. Ratio autem paradoxo est, quod con-
 tinuata divisione ipsius l per $m+m$, residuum divisionis non mi-
 nuitur, sed perpetuo ipsi l æquale manet; unde quotiens divisionis
 propriè non est sola series $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} + \frac{l}{m} - \frac{l}{m} \&c.$ sed $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} +$
 $\frac{l}{m} - \frac{l}{m} \&c. +$ vel $-\frac{l}{2m}$, faciendo scil. fractionem ex residuo &
 divisore, illamque signo + vel - afficiendo, prout ultimus seriei
 terminus vicissim - vel + habere fingitur.

XXXVIII. Fractionem $\frac{l}{\square : m - n}$ transmutare in seriem infinitam.

Quoniam quantitas $\frac{l}{m-n} \infty \frac{l}{m} + \frac{ln}{mm} + \frac{lnn}{m^3} + \frac{ln^3}{m^4} \&c.$ per
 XXXVI. facta utrinque multiplicatione per $\frac{l}{m-n}$, habebitur $\frac{l}{\square : m - n} \infty$
 seriei

seriei A, cujus termini singuli de novo in rotidem alias series B, C, D, E, F, &c. per eandem XXXVI. Prop. convertantur. Quo facto serierum istarum termini homologi in unam summam

$$\begin{array}{l}
 \frac{l}{\square : m - n} \infty A \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{l}{m m - m n} \infty \frac{l}{m m} + \frac{l n}{m_3} + \frac{l n n}{m_4} + \frac{l n^2}{m_5} + \frac{l n^3}{m_6} \&c. \infty B \\
 \frac{l n}{m_3 - m m n} \infty \cdot + \frac{l n}{m_3} + \frac{l n n}{m_4} + \frac{l n^2}{m_5} + \frac{l n^3}{m_6} \&c. \infty C \\
 \frac{l n n}{m_4 - m_3 n} \infty \cdot \cdot + \frac{l n n}{m_4} + \frac{l n^2}{m_5} + \frac{l n^3}{m_6} \&c. \infty D \\
 \frac{l n^2}{m_5 - m_4 n} \infty \cdot \cdot \cdot + \frac{l n^2}{m_5} + \frac{l n^3}{m_6} \&c. \infty E \\
 \frac{l n^3}{m_6 - m_5 n} \infty \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{l n^3}{m_6} \&c. \infty F \\
 \&c. \infty \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \&c. \infty \&c.
 \end{array} \right. \\
 \hline
 Z \infty \frac{l}{m m} + \frac{2 l n}{m_3} + \frac{3 l n n}{m_4} + \frac{4 l n^2}{m_5} + \frac{5 l n^3}{m_6} \&c. \infty \frac{l}{\square : m - n}
 \end{array}$$

conflati novam seriem Z constituent, æqualem propterea quantitati propositæ $\frac{l}{\square : m - n}$, mixtamque ex serie numerorum naturalium 1. 2. 3. 4. &c. & quantitatum geometricè progressionalium $\frac{l}{m m}, \frac{l n}{m_3}, \frac{l n n}{m_4}, \frac{l n^2}{m_5} \&c.$

Eadem series Z elici quoque potest divisione continua numeratoris l per denominatorem $m m - 2 n n + n n$, dicendo : $m m$ in l, habeo $\frac{l}{m m}$, quod ductum in divisorem & subtractum ex dividendo relinquit $+ \frac{2 l n}{m} - \frac{l n n}{m m}$; tum porrò $m m$ in $+ \frac{2 l n}{m}$, reperio $+ \frac{2 l n}{m_3}$, quod multiplicatum & subtractum, ut decet, residuum efficit $+ \frac{3 l n n}{m m} - \frac{2 l n^2}{m_3}$, atque ita ulterius pergendo in infinitum: quo pacto observabitur, post singulas operationes duo membra reliqua manere, sed illa usque & usque minora, tandemque data quavis quantitate propius ad nihilum vergentia.

Idem etiam ostenditur ex lege reciprocorum, resolvendo seriem Z methodo Prop. XIV. in infinitas series geometricas B, C, D, E, F &c. harum enim summæ cum novam progressionem A constituent,

tuant, quæ ipsa summam efficit $\frac{l}{mm - 2mn + nn}$, sequitur reciprocè, & hanc quantitatem $\frac{l}{\square : m - n}$ per seriem Z legitimè efferi posse.

XXXIX. Fractionem $\frac{l}{\square : m + n}$ convertere in seriem.

Si operatio instituat methodo Propos. præced. eadem, quæ ibi, obtinebitur series, nisi quod termini locorum parium acquirant signum —, sic ut habeatur: $\frac{l}{\square : m + n} \infty \frac{l}{m^3} - \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} - \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} - \frac{6ln^5}{m^7} \&c.$

XL. Fractionem $\frac{l}{C : m - n}$, aut $\frac{l}{C : m + n}$, exprimere per seriem.

Ex analogia operationum præcedentium liquet modus hoc efficiendi; quorsum igitur plura? En operationem:

$$\frac{l}{\square : m - n} \infty \frac{l}{m^3} + \frac{2ln}{m^3} + \frac{3lnn}{m^4} + \frac{4ln^3}{m^5} + \frac{5ln^4}{m^6} \&c. \text{ per}$$

XXXVIII, factaque hinc inde multiplicatione per $\frac{l}{m - n}$,

$\frac{l}{C : m - n} \infty$	}	$\frac{l}{m^3 - mmn} \infty \frac{l}{m^3} + \frac{ln}{m^4} + \frac{lnn}{m^5} + \frac{ln^3}{m^6} + \frac{ln^4}{m^7} \&c.$	per Prop. XXXVI.
		$\frac{2ln}{m^4 - m^3n} \infty \frac{2ln}{m^4} + \frac{2lnn}{m^5} + \frac{2ln^3}{m^6} + \frac{2ln^4}{m^7} \&c.$	
		$\frac{3lnn}{m^5 - m^4n} \infty \frac{3lnn}{m^5} + \frac{3ln^3}{m^6} + \frac{3ln^4}{m^7} \&c.$	
		$\frac{4ln^3}{m^6 - m^5n} \infty \frac{4ln^3}{m^6} + \frac{4ln^4}{m^7} \&c.$	
		$\&c. \infty \&c.$	
$\frac{l}{m^3} + \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} + \frac{10ln^3}{m^6} + \frac{15ln^4}{m^7} \&c. \infty \frac{l}{C : m - n}$			

Eodem pacto habetur $\frac{l}{C : m + n} \infty \frac{l}{m^3} - \frac{3ln}{m^4} + \frac{6lnn}{m^5} - \frac{10ln^3}{m^6} + \frac{15ln^4}{m^7} \&c.$

Constantur autem termini harum serierum ex ductu terminorum progressionis geometricæ in numeros trigonales 1. 3. 6. 10. 15. &c.

Si quis idem per divisionem continuam consequi desideret, is obser-

$$\frac{bx}{1} \& \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{3} \& \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \& \frac{bx^6}{6} \&c.$$

Mod. 2. Per Calc. diff. Leibn. Positis, ut prius, $AB \infty I \infty BD$, $BC \infty b$, & $BI (B') \infty x$, ejusque elemento $RI (e') \infty dx$, erit ex natura hyperbolæ $IO (i_0) \infty \frac{b}{18x}$, & elementum spatii hyperbolici $RO (e_0) \infty \frac{bdx}{18x} \infty$ seriei geometricæ $bdx \& bx dx + bxx dx \& bx^3 dx + bx^4 dx \&c.$ per XXXVI. & XXXVII; adeoque summa elementorum $S \frac{bdx}{18x}$, sive spatium $CBIO (CB_{i_0}) \infty bx \& \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{3} \& \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \&c.$ eadem series, quæ suprâ, mixta sc. ex geometrica & harmonica, per præced. Hæc igitur si summari possit, daretur Hyperbolæ quadratura.

Coroll. 1. Si $BI \infty B'$, dabitur tum summa tum differentia spatiorum $CBIO$ & CB_{i_0} per seriem ex geom. & harm. mixtam: cum enim sit ostensum

$$\begin{array}{l} CBIO \infty bx + \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} + \frac{bx^6}{6} \&c. \\ CB_{i_0} \infty bx - \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} - \frac{bx^6}{6} \&c. \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{fiet facta serierum} \\ \text{additione \& sub-} \\ \text{tractione,} \end{array} \right\}$$

$$CBIO + CB_{i_0} \infty \frac{2bx}{1} + \frac{2bx^3}{3} + \frac{2bx^5}{5} \&c.$$

$$CBIO - CB_{i_0} \infty \frac{2bx^2}{2} + \frac{2bx^4}{4} + \frac{2bx^6}{6} \&c.$$

Coroll. 2. Posita $BI, x' \infty BA, 1$, fit spatium interminatum hyperbolicum $PCBAS \infty \frac{b}{1} + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5} + \frac{b}{6} \&c.$ simplici seriei harmonicæ, quæ cum infinita sit per XVI, arguit & aream hujus spatii talem esse. Conf. Cor. 4. ejusd. Prop.

Cor. 3. Sin & $B', x, \infty BD, 1 \infty BC, b$, resultat pro spatio $CBDQ$ series harmonica $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \&c.$ hoc est, subducendo unumquemque terminum signo — affectum à præcedenti, series $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} \&c.$ cujus termini per saltum excerpti sunt ex serie reciproca trigonalium Q Prop. XV, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \&c.$

Mm 2

Quòd

Quòd si statuatur \square AB, BC vel BD quadruplo minus, np. $\frac{1}{4}$, exhibebitur etiam spatium CBDQ per seriem prioris subquadruplam $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120}$ &c. quæ per saltum formatur ex serie I Propos. XVII. Conf. Act. Lips. 1682. p. 46.

XLIII. Invenire aream spatii AB EFS (BD ϕ) comprehensi Asymptotæ hyperbolæ AD, & Curvæ BEF ($\epsilon\phi$), quæ talis, ut \square sub ejus applicata IE ($\epsilon\epsilon$) & recta constante AB, BC vel BD (quæ sit 1) æquetur spatium hyperbolico CBIO (CB $\iota\circ$). Fig. 2.

Quoniam, posita BI ∞x , spatium hyperbolicum CBIO $\infty x + \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per præced. eadem quoque series denotabit (ob AB vel BC $\infty 1$) longitudinem applicatæ IE, quæ propterea ducta in IR seu dx producit $x dx + \frac{xx dx}{2} + \frac{x^3 dx}{3} + \frac{x^4 dx}{4} + \frac{x^5 dx}{5}$ &c. ∞ RE, elem. spatii BIE. Hujus seriei terminos summando fit spatium BIE $\infty \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{30}$ &c. seriei mixtæ ex geometrica & reciproca trigonalium, quæ posito insuper BI, $x \infty$ BA, 1, mutatur in simplicem trigonalium reciprocam $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$ &c. cujus summa $\infty 1$, per XV. Est igitur totum spatium AB EFS absolute quadrabile, æquale quippe $\square^{\iota\circ}$ AB. Nota hic exemplum Curvæ mechanicæ, ubi quadratura specialis succedit absque generali; simplicis enim seriei summam dedimus, mixtæ non item.

Eadem ratione ostendetur ex altero latere spatium B $\epsilon\epsilon$ $\infty \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20}$ &c. totumque spatium BD ϕ $\infty \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$ &c.

Coroll. Completis rectangulis CD & BQ, ajo fore curvilineum mechanicum BD ϕ ∞ duplo curvilineo hyperbolico CQL, differentiam curvilinearum AB EFS & BD ϕ ∞ duplo spatium CQH, & summam eorundem $\infty 2$ CBDQ; quæ sic palàm fiunt: Si à serie $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ &c. subducatur $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ &c. auferendo sigillatim primum terminum à primo, secundum à secundo, tertium à tertio, &c. relinquetur $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} -$

$\frac{2}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42}$ &c. ∞ spatio $BD\phi$, ut ostensum. Si vero eadem series ex altera sic tollatur, ut primus ejus terminus dematur ex secundo alterius, secundus ex tertio, tertius ex quarto &c. orientur $\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6}$ &c. $\infty \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$ &c. $- 100$ (per præced.) duplo spat. hyperb. $CBDQ - BH \infty 2 CBDQ - 2 DL \infty 2 CLQ$. Ergo $BD\phi \infty 2 CLQ$. Igitur cum ostensum etiam sit $ABEFS \infty 1 \infty BH \infty 2 DL \infty 2 LH$, erit $ABEFS - BD\phi \infty 2 LH - 2 CLQ \infty 2 CQH$; nec non $ABEFS + BD\phi \infty 2 DL + 2 CLQ \infty 2 CBDQ$. Quæ erant demonstr.

XLIV. *Invenire aream spatii ABKGMT (BDN γ K) comprehensi asymptota hyperbolæ AD, & Curva KGM. (K γ N), quæ talis, ut \square BIG (B γ) sub ejus applicata IG (i γ) & indeterminata BI (B γ), æquetur spatio hyperbolico CBIO (CB γ o). Fig. 2.*

Quia positis omnibus, ut prius, spatium hyperb. $CBIO \infty x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c. per XLII, erit per hyp. facta divisione per BI seu x , recta $IG \infty 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5}$ &c. adeoque RG elem. spat. $BIGK \infty dx + \frac{x dx}{2} + \frac{x^2 dx}{3} + \frac{x^3 dx}{4}$ &c. omniaq; RG seu spatium $BIGK \infty \frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25}$ &c. & posita $x \infty 1$, spatium totale $ABKGMT \infty \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c. seriei reciprocæ quadratorum, cujus summam etiamnum desideramus. Conf. Prop. XVII. sub fin.

Haud dissimili modo reperitur ex altera parte spatium $B\gamma K \infty \frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{25}$ &c. sumtaque $x \infty 1$, totale spatium $BDN\gamma K \infty \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ &c.

Coroll. Spatium $ABKGMT$ duplum est spatii $BDN\gamma K$; cum enim summa utriusque sit $\frac{2}{1} + \frac{2}{9} + \frac{2}{25}$ &c. & differentia $\frac{2}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{36}$ &c. erit utique summa ad differentiam, ut $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}$ &c. ad $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}$ &c. h. e. ut 3 ad 1, per XXIV; unde spatium unum alterius duplum esse necesse est, ut maximè neutrius absolutam magnitudinem exploratam habeamus. Vid. Schol. ibid.

XLV. Exhibere Quadraturam Circuli aut Rectificationem Lineæ Circularis per seriem. Fig. 3.

In peripheria semicirculi BCD, sumto indefinitè puncto H, demittatur ex illo in radium AB perpendicularis HE; & sit AB $\propto 1$, & BE $\propto x$, adeoque ex nat. circ. EH $\propto \sqrt{2x - xx}$; quo posito, cum ob simil. Triangul. caracteristici LGH & Triangul. HEA, HE sit ad HA, sicut LG vel EF elem. abscissæ BE, ad LH elem. arcus circ. BH, reperitur LH $\propto \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$, factaque multiplicatione per $\frac{1}{2}$, semissem radii AH, sector HAL seu elem. sectoris HAB $\propto \frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}}$. Hæc igitur quantitas, cum absolute summari nequeat, in seriem convertenda est, sed prius tollenda irrationalitas, quod eo ferè modo fit, quo in Problematis Diophanteis uti vulgo sueverunt. In hunc finem pono $\sqrt{2x - xx} \propto \frac{x}{t}$, seu $2x - xx \propto \frac{xx}{tt}$, ubi quia divisio fieri potest per x , ipsaque non nisi unius dimensionis in æquatione relinquitur, ejus valor in rationalibus prodibit, unde & dx , & per hypoth. $\sqrt{2x - xx}$ seu $\frac{x}{t}$, ipsaque adeo fractio $\frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}}$, rationales fient; nempe $x \propto \frac{2tt}{1+tt}$, $dx \propto \frac{4tdt}{1+tt}$, $\sqrt{2x - xx} \propto \frac{x}{t} \propto \frac{2t}{1+tt}$, & deniq; $\frac{dx}{2\sqrt{2x - xx}} \propto \frac{dt}{1+tt}$; hinc fractio in seriem geometricam per XXXVII conversa exhibet $dt - ttdt + t^4dt - t^6dt + t^8dt$ &c. Summa igitur elementorum HAL, seu totus sector HAB $\propto t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. eoque per semissem radii $\frac{1}{2}$ diviso, arcus BH $\propto \frac{2t}{1} - \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{2t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11}$ &c. quæ series mixtæ sunt ex geometrica & harmonica, per XLI, à quarum proin summatione decantatum illud de Circuli Tetragonismo Problema dependet. Nota, ductis ex B & H tangentibus circuli BI, HI, sibi mutuo occurrentibus in I, junctaque HD, quæ radium AC fecet in K, fore BI vel IH $\propto AK$, utramlibet autem $\propto t$. Nam 2. ang. BAI \propto BAH \propto AHD $+ ADH \propto 2ADH$. Ergo BAI \propto ADH;

A D H; cumque & A B I & D A K anguli, nec non latera A B & A D æquentur, erit quoque B I ∞ A K. Deinde cum sit per hypoth. 1 ad t, ut $\sqrt{2x - xx}$ ad x; itemque, ob sim. $\triangle D A K$ & D E H, A D seu 1 ad A K, sicut D E ad E H, hoc est, ex nat. circul. H E ad E B, seu $\sqrt{2x - xx}$ ad x; erit utique 1. t :: 1. A K, ac proinde A K seu B I ∞ t.

Coroll. 1. Sumta $t \infty 1$, quo casu & B E, x seu $\frac{2t^2}{1+t^2}$, æquatur B A, 1, fiet quadrans B A C ∞ simplici seriei harmonicæ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. ∞ (subducto reapse unoquoque termino signo affecto à præcedente) $\frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99}$ &c. Hinc quia quadratum radii est ad quadrantem circuli, sicut quadratum diametri ad totum circulum, sequitur si quadratum diametri, h. e. quadratum circulo circumscriptum sit 1, ac proin eidem inscriptum $\frac{1}{2}$, totius circuli aream per modo memoratam seriem expressum iri; adeoque si quadratum circulo inscriptum sit $\frac{1}{4}$, circuli aream fore $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. cujus seriei termini per saltum excerpti sunt ex serie H Prop. XVII. Conf. Act. Lips. 1682. p. 45.

Coroll. 2. Posita Tangente B I ∞ t, erit arcus, cujus tangens est; $\infty \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$ &c. utpote semissis arcus B H. Confer Act. Lips. 1691. pag. 179.

XLVI. Exhibere generaliter Sectorem cujusvis Sectionis Conicæ ex centro per seriem. Fig. 4. & 5.

Esto Coni Sectio quæcunque, Hyperbola five Ellipsis, B C D, cujus centrum A, vertex B, semi-latus transversum A B ∞ a, semi-axis conjugatus A L ∞ 1, adeoque semi-latus rectum ∞ $\frac{1}{a}$, & ratio laterum, ut a a ad 1. Ponanturque porrò, abscissa indeterminata B G ∞ x, A G ∞ z ∞ a \wp x (\wp significat + in Hyperbol. & - in Ellips. uti \wp vicissim - in Hyp. & + in Ell.) ejusque elementum F G vel C H ∞ dx ∞ \wp dz, ordinata G D ∞ y, ejus elementum D H ∞ dy, & jungens D cum centro recta A D ∞ u ∞ $\sqrt{zz + yy}$. Ducta etiam intelligatur H C I parallela axi, secans-
que

que curvam in C & rectam AD in I, atque ex C demissa concipiatur in AD perpendicularis CE. Quibus positis, erit primo ex nat. Curv. aa . $1 :: \int z z \int aa (2ax \int xx) . yy$; unde fit $aa yy \propto \int z z \int aa (2ax \int xx)$, & differentiando $aa y dy \propto \int z dz$, & denique $dy \propto \frac{\int z dz}{aa y} \propto \frac{z dx}{aa y}$. Deinde quoniam, ob sim. $\triangle DGA$ & DHI , DG, y est ad GA, z , sicut DH, dy , ad HI, invenitur HI $\propto \frac{z dy}{y}$, ac proinde CI (HI \int HC) $\propto \frac{z dy}{y} - dz \propto \frac{z dy - y dz}{y}$. Quare denuò propter \triangle sim. AGD & IEC , ut AD, u , ad DG, y , sic IC, $\frac{z dy - y dz}{y}$, ad CE; unde reperitur CE $\propto \frac{z dy - y dz}{u}$, quæ ducta in semissem AD, seu $\frac{1}{2}u$, dat aream trianguli elementaris ACD $\propto \frac{z dy - y dz}{2} \propto$ (posito loco dy valore ejus) $\frac{\int z z dz - y dz}{2aa y} \propto \frac{\int z z dz - aay y dz}{2aa y} \propto$ (substituendo $\int z z \int aa$ loco $aa yy$) $\frac{\int z z dz \int z z dz \int aa dz}{2aa y} \propto \frac{\int aa dz}{2aa y} \propto \frac{adx}{2ay} \propto$ (loco ay surrogando $\sqrt{2ax \int xx}$) $\frac{adx}{2\sqrt{2ax \int xx}}$, de qua in seriem convertenda & summanda agitur. Primò autem irrationalitas ex illa tollenda, mediante alia indeterminata, quæ loco x surrogari debet, ut in præc. Pono itaque $\sqrt{2ax \int xx} \propto \frac{x}{t}$, unde fluit $x \propto \frac{2att}{18tt}$, & $dx \propto \frac{4atdt}{\square:18tt}$, & $\sqrt{2ax \int xx} \propto \frac{x}{t} \propto \frac{2at}{18tt}$, & denique $\frac{adx}{2\sqrt{2ax \int xx}} \propto \frac{adt}{18tt} \propto$ seriei geom. $adt \int att dt + at^4 dt \int at^6 dt + at^8 dt$ &c. per XXXVI & XXXVII. Summa igitur omnium sectorum elementarium ACD, i. e. area totius Sectoris ABCD $\propto at \int \frac{at^3}{3} + \frac{at^5}{5} \int \frac{at^7}{7} + \frac{at^9}{9}$ &c. \square scil. comprehenso sub a semi-latere transverso & recta, cujus longitudo est $t \int \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \int \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9}$ &c. Unde patet, quo pacto generaliter quadraturæ sectionum Conicarum ad summas serierum ex geomet. & harmon. mixtarum reducantur.

Nota,

Nota, ductis per verticem B & punctum Curvæ D tangentibus BM, DT, sibi mutuo occurrentibus in M, dico fore $BM \propto t$. Quoniam enim $AG. AB :: AB. AT$, per 37. lib. 1. Apoll. ac idcirco convertendo $AB. TB :: AG. z. GB. x$; nec non (ob sim. $\triangle TBM$ & CHD) $TB. BM :: CH. dx. HD. dy ::$ (ex æquat. Curvæ different.) $ay. z$; erit ex æquo perturbatè $AB. a. BM :: ay. x$; unde obtinetur $BM \propto \frac{x}{ay} \propto \frac{x}{\sqrt{2ax} \& xx}$; adeoque $\sqrt{2ax} \& xx. x :: 1. BM$: verum per constructionem $\sqrt{2ax} \& xx. x :: 1. t$. Ergò omnino $BM \propto t$. Conf. Act. Lips. 1691. p. 179.

XLVII. Dato Numero invenire Logarithmum per seriem. Fig. 6.

Intelligatur super axe SA^σ Curva quædam CB^x , ejus naturæ, ut abscissæ $AR, AS (A^\epsilon, A^\sigma)$ crescant arithmeticè, dum applicatæ $RE, SC (\epsilon^\epsilon, \sigma^x)$ crescunt vel decrescunt geometricè, h. e. ut istæ sint ut Numeri, dum illæ sunt ut Logarithmi. Vocabitur hæc Curva *Logarithmica*, cujus hæc est proprietas, ostendente Acut. Leibnitio in Act. Lips. 1684. p. 473. "ut Subtangentes ejus omnes AK, RN, ϵ^ν sint æquales. Applicetur in A recta AB , & sumto quovis in curva puncto $E (\epsilon)$ ducatur recta $EI (\epsilon')$ parallela axi SA ; voceturque $AB I, BI (B')$ x ; adeoque $AI (A')$ seu $RE (\epsilon^\epsilon) 1 \& x$; nec non $AR (A^\epsilon) y$, & constans curvæ subtangens b . Dato itaque numero $RE (\epsilon^\epsilon)$ ejus Logarithmus $AR (A^\epsilon)$ sic invenitur. Quoniam ex nat. gen. curvarum, elementum applicatæ $EF (\epsilon\phi) dx$, est ad elementum abscissæ $FG (\phi\gamma) dy$, sicut applicata $RE (\epsilon^\epsilon) 1 \& x$, ad curvæ subtaugentem $RN (\epsilon^\nu) b$, habebitur $dy \propto \frac{b dx}{1 \& x} \propto$ fractione in seriem resoluta per XXXVI & XXXVII) $b dx \& bx dx + bx^2 dx \& bx^3 dx + bx^4 dx \& bx^5 dx$ &c. ideoque facta summatione, y , hoc est, $AR (A^\epsilon) \propto bx \& \frac{bx^2}{2} + \frac{bx^3}{3} \& \frac{bx^4}{4} + \frac{bx^5}{5} \& \frac{bx^6}{6}$ &c. quæ insuper in casu speciali $BI (B')$ $\propto BA \propto BD$, seu $x \propto 1$, fit $b \& \frac{b}{2} + \frac{b}{3} \& \frac{b}{4} + \frac{b}{5} \& \frac{b}{6}$ &c.

v. Keil Trig. p. 69

Coroll. 1. Identitas hujus seriei cum illa, quam supra Prop. XLII. pro spatio Hyperbolico quadrando reperiimus, de mutua dependentia & affinitate inter Hyperbolam & Logarithmos nos admonet, perspicuumque facit, quod sumtis in utraque Fig. 1. & 6. ipsis BI (B') æqualibus spatium hyperbolicum CBIO (CB'io) æquetur \square^{lo} sub unitate AB & Logarithmo AR (Ae). Unde porro infertur, quod sumtis utrobique AB, A', AD, hoc est, AB, e^e, e^x continuè proportionalibus, quo casu ex natura Logarithmicæ A^e dupla fiet ipsius A_e, spatium hyperbolicum CBDQ duplum quoque sit ipsius CB'io, indeque CB'io, o' DQ spatia futura sint æqualia.

Coroll. 2. Quoniam evidens est, existente BI ∞ AB, h. e. evanescente AI seu RE, Logarithmum AR reddi infinitum, sequitur & seriem harmonicam Logarithmum hunc exprimentem, $b + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5} \&c.$ talem esse; unde denuò veritas Prop. XVI. constat.

Coroll. 3. Dato quovis Logarithmo putà binarii, determinari potest ex illo curvæ subtangens b ; cum enim posita BD ∞ 1 ∞ AB, adeoque AD ∞ e^x ∞ 2, ostensum sit A^e Log-um binarii esse $\infty b - \frac{b}{2} + \frac{b}{3} - \frac{b}{4} \&c. \infty b$ in $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \&c.$ erit vicissim $b \infty$

$$\frac{\text{Log. 2.}}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \&c.}$$

XLVIII. Dato Sinu complementi reperire Logarithmum Sinus recti per seriem. Fig. 6.

In eadem fig. centro A per B descriptus esto circuli quadrans BH^e, quem producta EI secet in H, erit AI seu RE sinus arcus H^e, & AR ejus Logarithmus, existente vid. radii AB ceu unitatis Logarithmo 0. Ponatur sinus complementi IH. ∞x , ut fiat sinus rectus AI seu RE $\infty \sqrt{1 - xx}$, ejusque elementum EF $\infty \frac{-x dx}{\sqrt{1 - xx}}$, erit ex nat. gen. curv. EF $\frac{-x dx}{\sqrt{1 - xx}}$ ad FG, elementum Log-i AR; ut RE, $\sqrt{1 - xx}$ ad subtangentem Logarithmicæ RN quæ sit 1; adeoque FG $\infty \frac{-x dx}{1 - xx} \infty$ (per XXXVI) $-\frac{x dx}{1 - xx}$

$-x^3$

— $x^3 dx$ — $x^5 dx$ — $x^7 dx$ &c. Quare summando fient omnia FG, seu Log-us AR ∞ — $\frac{x^2}{2}$ — $\frac{x^4}{4}$ — $\frac{x^6}{6}$ — $\frac{x^8}{8}$ — $\frac{x^{10}}{10}$ &c. negativus scil. quia numerus ejus RE minor est unitate AB; at si fiat positivus $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8}$ &c. hoc est, si AR transferatur ex altera parte in Ae, erit is propriè Logarithmus rectæ eε, id est (ex natura Log-orum) tertiæ proportionalis ad ipsum sinum RE & radium AB; qui tamen Log-us immediatè quoque reperiri potuisset ex valore numeri sui eε ∞ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Idem etiam D. Leibnitius Act. Lips. 1691. p. 180. eleganter hoc modo :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Log. } \sqrt{1-x} \infty -y \infty -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \text{ \&c.} \\ \text{Log. } \sqrt{1+x} \infty +y \infty +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \text{ \&c.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{per} \\ \text{præc.} \end{array}$$

Log. $\sqrt{1-xx}$ ∞ (ex nat. log.)

$$\text{Log. } \sqrt{1-x} + \text{log. } \sqrt{1+x} \infty -xx - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} \text{ \&c.}$$

$$\text{Log. } \sqrt{1-xx} \infty \frac{1}{2} \text{log. } \sqrt{1-xx} \infty - \frac{xx}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \text{ \&c.}$$

Coroll. Posito sinu complementi HI hujus fig. ∞ BI vel B' fig. 1. æquabitur \square lum sub Logarithmo sinus recti AR & radio AB dimidio excessui, quo spatium hyperbolicum CBIO superat alterum CB'0. Patet ex Cor. 1. XLII, ubi CBIO — CB'0 serie præsentis dupla expressum legitur. Cæterum moneri potuisset ibi, quod sumta & tertia proportionali ad 1 & x, seu posita $z \infty xx$, series illa convertatur in aliam $z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}$ &c. qua quoque spatium hyperbolicum, putâ CBGM, existente BG ∞z vel xx , innuitur. Hinc enim patet, quòd CBIO — CB'0 ∞ CBGM; & CBIO — CBGM seu MGIO ∞ CB'0; adeoque (cum his positis AI, $1-x$ sit ad AG, $1-xx$, sicut AB, 1 ad A', $1+x$) quòd sumtis AI, AG, AB, A' utcunque proportionalibus spatia segmentis IG, B' insistentia semper futura sunt æqualia.

XLIX. *Applicatam Curvæ Catenaræ exhibere per seriem, Fig. 6.*

Est Curva $\mu B \lambda$, quam Catena ab extremitatibus suis liberè suspensa proprio pondere format, dicta *Catenaria*; cujus centrum A, vertex B, axis ABD, parameter AB $\infty 1$, abscissa A' ∞z , & applicata λ vel $\mu \infty y$. Constat ex iis, quæ Act. Lips. 1691. p. 274. &c. hac de Curvæ memoriæ prodita leguntur, elementum applicatæ dy

sit $AB = a = 1$, $B1 =$
 $x = z - 1$; erit
 Fluxio Ordinate y
 $= \frac{ax}{\sqrt{ax+bx}}$ (p. Greg.
 Démonstr. in Phil. Gr.
 p. 40) = (substituendo
 $z - 1$ pro x) $\frac{z}{\sqrt{z-1}}$

esse $\infty \frac{dz}{\sqrt{zz-1}}$. Hinc ad tollendam surditatem pono $\sqrt{zz-1} \infty$

$t - z$; unde fit $z \infty \frac{t+t-1}{2t}$, $dz \infty \frac{t-t-1}{2tt} dt$, $\sqrt{zz-1} \infty t - z$

$\infty \frac{t-t-1}{2t}$, ac denique $\frac{dz}{\sqrt{zz-1}} (dy) \infty \frac{dt}{t}$. Quam porrò fra-

ctionem ut in seriem convertam, facio denominatorem bimem-

brem, substituendo $1+x$ loco t , & dx loco dt ; eritque $\frac{dt}{t}$ seu dy

$\infty \frac{dx}{1+x} \infty$ (per XXXVII) $dx - xdx + xx dx - x^3 dx + x^4$

dx &c. unde omnia dy seu $y \infty x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ &c.

Quoniam autem $z \infty \frac{t+t-1}{2t}$, hoc est, $tt \infty 2zt - 1$, & t seu

$1+x \infty z + \sqrt{zz-1}$, prodibit $x \infty z - 1 + \sqrt{zz-1} \infty$ (fa-

cta $D \infty \sqrt{zz-1}$) $B' + D \infty BD$; igitur data A', z dabi-

tur BD, x , indeque λ seu y per seriem.

Coroll. Ex serie inventa collata cum Prop. XLVII. liquet, y esse

Logarithmum numeri x ; unde data Logarithmica $x BC$, cujus

subtangens $\infty AB \infty 1$, puncta Catenariæ reperire proclive. Cùm

enim z , hoc est, A' vel $\sigma \lambda (S\mu) \infty \frac{t+t-1}{2t} \infty \frac{1}{2}t + \frac{1}{2t}$, patet, ab-

scissis hinc inde Logarithmis æqualibus A' σ (AS) ordinatam Ca-

tenariæ $\sigma \lambda (S\mu)$ semissem esse oportere summæ duarum ab AB

æquidistantium ordinarum Logarithmicæ σx & SC, quarum illa

$\infty AD \infty t$, hæc ex natura Log. $\infty \frac{1}{t}$. Atque in hoc ipso con-

sistit elegantissima hujus Curvæ constructio Leibnitiana, quam vi-

desis in Act. Lips. 1691. p. 277. seqq.

L. Datis latitudine loci alicujus in Curva Loxodromica & angulo Rumbi cum meridiano, exhibere longitudinem loci per seriem. Fig. 3.

Lineam Rumbicam seu Loxodromicam vocant Nautæ, quam navis secundum eundem venti Rumbum constanter incedens in superficie globi terr-aquei describit; adeoque curva est, quæ omnes meridianos eodem angulo obliquo interfecat. Incipit hæc in Æquatore, indeque versus alterutrum polorum obliquè recedendo, tandem in ipsum polum, quem infinitis gyris ambit, desinit. Sumto in fig. 3. sinus totus, idemque & radius Æquatoris, $AC \propto r$, BCD meridianus, B & D poli, tangens anguli Rumbici $\propto t$, H punctum in Loxodromica, ejus latitudo HC , sinus latitudinis AE , & sinus complementi HE qui vocetur z , longitudo verò seu arcus æquatoris inter meridianum loci H & principium Loxodromicæ interceptus dicatur x . His positis, per illa quæ in Act. Lips. 1691. p. 284. ostensa sunt, invenitur elementum longitudinis $dx \propto$

$$\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}} : \text{ad cujus tentandam reductionem pono primò } z \propto \frac{1}{p};$$

$$\text{unde fit } dz \propto \frac{-dp}{pp}, \frac{dz}{z} \propto \frac{-dp}{p}, \sqrt{1-zz} \propto \frac{\sqrt{pp-1}}{p}, \&$$

$$\text{denique } \frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}} (dx) \propto \frac{tdp}{\sqrt{pp-1}}; \text{ porrò quidem memini, ejus-$$

dem formæ fuisse elementum Catenariæ in præc. pergo ponere si-

$$\text{cut ibi, } \sqrt{pp-1} \propto p-q, \text{ indeque elicio } \frac{tdp}{\sqrt{pp-1}} (dx) \propto$$

$$\frac{-tdq}{q}, \text{ ac rursus statuendo } q \propto 1-r \text{ tandem obtineo } \frac{-tdq}{q} (dx)$$

$$\propto \frac{tdr}{1-r}; \text{ quæ quidem quantitas etiam immediatè elici potuisset ex}$$

$$\text{quantitate } \frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}} \text{ si statim fecissem } z \propto \frac{z-2r}{z-2r+rr} : \text{ at in ta-}$$

les hypotheses incidere sæpenumerò difficile est, nisi jam usu com-

pertum habeatur, quæ formulæ in quas transformari possint.

Nota, $r \propto AC - BI$, excessui nempe radii suprâ tangentem se-

missis complementi latitudinis puncti H ; etenim supposita BI

$\propto 1-r$, ductaque recta BH , cum similia sint triangula HEB ,

ABI , erit HE, z , ad $EB, 1 - \sqrt{1-zz}$, ut $AB, 1$, ad $BI, 1-r$, unde

164

resultat $z \propto \frac{z - zr}{z - zr + rr}$, ut oportet. Conversa autem per XXXVI. inventa quantitate $\frac{z dr}{1 - r}$ in seriem, habetur $dx \propto t dr + tr dr + trr dr + tr^3 dr \&c.$ & facta summatione $x \propto tr + \frac{trr}{2} + \frac{tr^3}{3} + \frac{tr^4}{4} \&c.$ Patet igitur, quomodo ex data tangente semissis complementi latitudinis inveniatur longitudo.

Sciendum autem, elementum longitudinis $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ adhuc aliter posse reduci, statuendo nempe $\sqrt{1-zz} \propto y$; hinc enim fit $z \propto \sqrt{1-yy}$, $dz \propto \frac{-y dy}{\sqrt{1-yy}}$, & $\frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}} (dx) \propto \frac{tdy}{1-yy} \propto$ (per XXXVI) $tdy + ty^2 dy + ty^4 dy + ty^6 dy \&c.$ ac deniq; omnia dx seu $x \propto ty + \frac{ty^3}{3} + \frac{ty^5}{5} + \frac{ty^7}{7} \&c.$ ubi perspicuum est, y seu $\sqrt{1-zz} \propto$ AE sinui recto arcus HC; unde constat ratio definiendi etiam quaesitum ex sinu recto latitudinis, quemadmodum fecit Dn. Leibnitijs Act. Lips. 1691. p. 181. Et patet, si in calculo, per quem ad initio memoratam æquationem $dx \propto \frac{-tdz}{z\sqrt{1-zz}}$ perveni, loco quantitatis indeterminatæ ipsum suum rectum AE præ sinu complementi HE selegissem, me statim ad alteram æquationem immediatè in seriem convertibilem $dx \propto \frac{tdy}{1-yy}$ perventurum fuisse. Cæterum ex eo, quod duæ inventæ series eandem quantitatem x denotant, obiter concludimus, quod si in circulo sinus cujuslibet arcus AE dicatur y , & AC — BI excessus radii suprâ tangentem semissis complementi vocetur r , perpetuò futurum sit $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \&c. \propto r + \frac{rr}{2} + \frac{r^3}{3} \&c.$ Notamus etiam, si locus H sit in ipso polo, quo casu $r \propto 1 \propto y$, fore $x \propto t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{4} \&c.$ vel $\propto t + \frac{t}{3} + \frac{t}{5} \&c.$ quarum serierum summæ cum sint infinitæ per XVI, docent longitudinem loci H quoque infinitam esse, adeoque, quod dixi, curvam loxodromicam infinitis polum gyris ambire, priusquam in ipsum incidat.

Coroll.

Coroll. 1. Si in eadem Loxodromica præter locum H alius sit locus notæ latitudinis, cujus sinus rectus ∞v , & excessus radii supra tangentem semissis complementi ∞s , erit similiter ejus longitudo ∞t in

$v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} \&c.$ vel ∞t in $s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} \&c.$ adeoque differentia longitudinum utriusque loci erit utriusque seriei differentia, np.

t in $\frac{v^2-v}{1} + \frac{v^3-v^3}{3} + \frac{v^5-v^5}{5} \&c.$ vel, t in $\frac{r-s}{1} + \frac{r^2-s^2}{2} + \frac{r^3-s^3}{3} \&c.$ Hinc si in alia quadam Loxodromica duo concipiantur

loca latitudine cum prioribus convenientia, erunt, manentibus y & v , vel r & s iisdem, differentiæ longitudinum ut tangentes angulorum, quos Rumbi faciunt ad meridianos. Vid. Act. Lips. 1691. p. 182. & 285.

Coroll. 2. Ex collatione harum serierum cum seriebus Propp. XLII. XLVI. & XLVII. liquet Problematis convenientia cum quadratura Hyperbolæ & Logarithmis. Speciatim notamus, quòd existente subtangente Logarithmicæ ∞t , quæsitæ longitudo puncti H sit ipse Logarithmus rectæ $1-r$ seu BI, ut patet ex XLVII; vel etiam (cum D. Leibnitio loc. cit.) semissis Log-i quantitatis $\frac{1+y}{1-y}$ seu $\frac{DE}{EB}$, quod sic ostenditur:

$$\left. \begin{aligned} \text{Log. } \overline{1+y} \infty + ty - \frac{tyy}{2} + \frac{ty^3}{3} - \frac{ty^4}{4} + \frac{ty^5}{5} - \frac{ty^6}{6} \&c. \\ \text{Log. } \overline{1-y} \infty - ty - \frac{tyy}{2} - \frac{ty^3}{3} - \frac{ty^4}{4} - \frac{ty^5}{5} - \frac{ty^6}{6} \&c. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{per} \\ \text{XLVII.} \end{array}$$

$$\text{Log. } \frac{1+y}{1-y} \infty$$

$$\text{Log. } \overline{1+y} - \text{log. } \overline{1-y} \infty 2ty + \frac{2ty^3}{3} + \frac{2ty^5}{5} \&c.$$

Coroll. 3. Data longitudine & latitudine loci, dabitur angulus Rumbi cum meridiano; cum enim $x \infty t$ in $r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \&c.$ ∞t in $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \&c.$ erit $t. 1 :: x. r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \&c.$ vel $y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \&c.$

&c. id est, tangens anguli quæfiti ad finum totum, ut arcus longitudinis ad Log-um BI, vel femissem Log-i $\frac{DE}{EB}$; adeoque per Coroll. 1. hujus, ut differentia duarum longitudinum ad differentiam duorum Log-orum BI, vel femi-differentiam duorum $\frac{DE}{EB}$.
 Intellige hic Logarithmos acceptos in Curva, cujus subtangens ∞ radio ∞ 1. Nota, si desideretur angulus Loxodromicæ, quæ non nisi post unam pluresve integras revolutiones in datum locum perducatur, augendus est arcus differentiæ longitudinum integra peripheria æquatoris ejusve multiplo.

Schol. Ex hactenus dictis expeditus habetur modus construendi *scalam* quandam *Loxodromicam*: Esto in Fig. 6. BM σ circumferentia æquatoris in gradus suos & graduum minutias divisa; hæc extendatur in rectam AS axem Logarithmicæ CB σ , ejusque divisionibus ordine ab A adscribantur gradus longitudinum: tum sumto indefinite in circumferentia hac puncto M, bisectoque arcu M σ per rectam AT occurrentem tangenti σ in T, ducatur ex T recta TE axi AS parallela, fecans Logarithmicam in E; ac denique ex E demittatur in axem perpendicularis ER; punctoque R adscribatur numerus graduum in arcu BM: sic habebuntur etiam gradus latitudinum; parataque erit Scala Loxodromica, quæ primario inserviet Rumbo, cujus anguli tangens æquatur sub tangenti Logarithmicæ. Numeri enim graduum cujusvis datæ latitudinis in scala statim à latere aspectui offerunt respondentes longitudinis gradus. Eadem tamen etiam cuilibet Rumbo prodesse poterit, si fiat per Coroll. 1. hujus, ut subtangens Logarithmicæ, è qua scala constructa est, ad anguli Rumbici tangentem, sic longitudo vel differentia longitudinum per scalam inventa ad longitudinem vel differentiam longitudinum quæsitam: adeo ut scala ejusmodi in usum nautarum circino proportionis insculpta, & lineæ partium æqualium; quæ longitudinum gradus repræsentarent, juxta posita instrumentum foret omnium forsitan, quæ Naturæ hactenus tractarunt, compendiosissimum & utilissimum. Sed de his satis.

Antequam pergamus, Lector advertere potest, quodd hucusque in differentialium summatione pro quovis elemento semper ejus integrale purum seu absolutum substituimus, velut x pro dx , $\frac{x^2}{2}$ pro $x dx$ &c. At scire ipsum volumus, hoc minimè esse perpetuum; quanquam enim una eademque quantitas x non nisi unum habeat differentiale dx , idem tamen differentiale dx infinita habet integralia, unum quidem purum x , reliqua admistione quantitatum constantium affecta $x + a$, $x - b$ &c. quorum in summationis negotio pro re nata nunc hoc nunc illud seligendum est, neque adeo sine presenti hallucinationis periculo indiscriminatim semper purum adsumi potest. Restat itaque, ut ad vitandum scopulum, quem communem ferè esse video omnibus iis, qui calculum hunc incautius tractant, subjiciamus adhuc ejus rei exemplum in uno alterove Problemate, è cujus enodatione Lectori constare possit, undenam & quibus criteriis dignoscatur, quid pro quovis semper elemento summando substitui conveniat.

L I. Exhibere longitudinem Curvæ Parabolicæ per seriem. Fig. 4.

Fingamus BCD Curvam esse Parabolam, cujus vertex B, axis BG, latus rectum $\propto a$, abscissa BG $\propto x$, applicata GD $\propto y$, ipsa BCD curva $\propto s$; proinde elem. FG vel CH $\propto dx$, DH $\propto dy$, & CD $(\sqrt{dx^2 + dy^2}) \propto ds$. Erit ex natura Curvæ $ax \propto yy$; hinc differentiando $adx \propto 2ydy$, quadrandoque $aa dx^2 (aads^2 - aady^2) \propto 4yydy^2$, & facta transpositione $aads^2 \propto aady^2 + 4yydy^2$, extractaque tandem radice $ads \propto dy \sqrt{aa + 4yy}$, quæ quantitas est, de qua summanda agitur. Ad surditatem primò eliminandam pono $\sqrt{aa + 4yy} \propto z - 2y$, fiet $aa \propto zz - 4zy$, & $y \propto \frac{zz - aa}{4z}$; hinc $dy \propto \frac{zz + aa}{4zz} dz$, nec non $\sqrt{aa + 4yy} (z - 2y) \propto \frac{zz + aa}{2z}$, adeoque $dy \sqrt{aa + 4yy} (ads) \propto \frac{z^4 + 2aa zz + a^4}{8z^3} dz \propto$ (membris separatim positis) $\frac{zdz}{8} + \frac{aadz}{4z} + \frac{a^4 dz}{8z^3}$, de quorum nunc summis dispiciendum. Hunc in finem considero relationem, quam habet assumpta litera indeterminata z ad ordinatas Curvæ nostræ, eamque ex facta hyp. $\sqrt{aa + 4yy} \propto z - 2y$ cognosco talem esse, ut existente $y \propto 0$, z non pariter evanescat, sed

O o sit

sit ∞a , & quod crescente y eò fortius crescere debeat z ; quapropter extensa concipiatur ipsa z in recta DB fig. 3. à puncto D , & sit prima DA , quæ nascenti y respondet, ∞a , ultimaque z , quæ respondet ultimæ y seu applicatæ GD fig. 4. esto DE . Tum fluere intelligatur ab A ad E indefinita recta AK vel EH , æqualis ubique $\frac{z^2}{16}$ (integrâli scil. puro primi membri $\frac{z dz}{8}$) minimaque adeo in A & $\infty \frac{aa}{16}$; sic ipsum fluentis lineæ incrementum fiet $\frac{z dz}{8}$, & omnia incrementa quæ capit linea, dum ex A movetur in E , repræsentabunt omnia $\frac{z dz}{8}$, quæ ordinatis y à minima (0) ad ultimam (GD) ordine respondent, h. e. quæ pertinent ad Curvæ Parabolicæ portionem rectificandam BD (fig. 4.) Constituunt autem omnia illa incrementa, ut liquet, non integram EH ($\frac{z^2}{16}$) sed excessum tantum ejus suprâ rectam AK ($\frac{aa}{16}$) hoc est, $EH - AK$ seu $\frac{z^2 - aa}{16}$. Integrale igitur primi membri $\frac{z dz}{8}$, quod huc quadrat, est $\frac{z^2 - aa}{16}$. Similiter pro integrando tertio membro $\frac{a^4 dz}{8 z^3}$, fingo z extendi in recta AD fig. 1. à puncto A , primamque quæ nascenti y respondet esse $AB \infty a$, & quæ respondet ultimæ, AD ; hinc fluere concipio à B versus D quantitatem $\frac{a^4}{16 z^2}$, seu integrale purum ipsius $\frac{a^4 dz}{8 z^3}$, putâ rectam BC vel DQ , quæ proin maxima erit in B & $\infty \frac{aa}{16}$, indeque versus D decrescet; decrementsa itaque, quæ patitur linea BC quousque pervenit in DQ , denotabunt omnia elementa $\frac{a^4 dz}{8 z^3}$, quæ portioni Curvæ Parabolicæ BD (fig. 4.) respondent: sed omnia illa decrementsa, ut apparet, non efficiunt rectam DQ seu $\frac{a^4}{16 z^2}$, verum potius $BC - DQ$ seu $\frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16 z^2}$; quapropter integrale tertii membri $\frac{a^4 dz}{8 z^3}$ huc pertinens

$$\infty \frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16z^2}, \text{ summaque adeo primi \& tertii } \left(S \frac{zdz}{8} + S \frac{a^4 dz}{8z^3} \right)$$

$$\infty \frac{z^2 - aa}{16} + \frac{aa}{16} - \frac{a^4}{16z^2} \infty \frac{z^4 - a^4}{16z^2}.$$

Restat intermedium adhuc membrum expediendum $\frac{a^4 dz}{4z}$. Hoc cum absolutè summari nequeat, in seriem converto, ponendo prius $z \infty a + t$, ut denominator fiat bimembris; hinc enim fit $\frac{a^4 dz}{4z}$

$$\infty \frac{a^4 dt}{4a + 4t} \infty \text{ (per XXXVII) } \frac{adt}{4} - \frac{tdt}{4} + \frac{t^2 dt}{4a} - \frac{t^3 dt}{4aa} \&c. \&$$

facta summatione, $S \frac{a^4 dz}{4z} \infty \frac{at}{4 \cdot 1} - \frac{tt}{4 \cdot 2} + \frac{t^3}{4 \cdot 3a} - \frac{t^4}{4 \cdot 4aa} + \frac{t^5}{4 \cdot 5a^3}$

&c. Nota, quod hîc pro quolibet seriei termino substituam ejus integrale purum, quoniam ex æquatione $z \infty a + t$ colligo, quod existente $z \infty a$ (hoc est $y \infty 0$) ipsa t , ut & quantitates fluentes omnes, $\frac{at}{4 \cdot 1}, \frac{tt}{4 \cdot 2}, \frac{t^3}{4 \cdot 3a}$ &c. quoque sint $\infty 0$, id est, quod hæ à 0 fluere seu incrementa sumere occipiant; hinc enim manifestè liquet, omnia ipsarum crementa, nempe omnia $\frac{adt}{4}, \frac{tdt}{4}$ &c. ipsis quantitatibus

ultimis $\frac{at}{4}, \frac{tt}{4 \cdot 2}$ &c. æqualia fore. Quod idem quoque, si quis examinet, in omnibus præcedentium Propp. exemplis contingere observabit, indeque concludet, rectè à nobis factum, quod ibidem inter summandum pura semper integralia assumserimus, tametsi ejus rei rationem disertè non adjecerimus. Sed revertamur ad propositum: Inventa summa medii membri $\frac{a^4 dz}{4z}$, si reliquorum

summæ suprâ repertæ adjiciantur, emergit summa omnium $S \frac{zdz}{8} + S \frac{a^4 dz}{4z} + S \frac{a^4 dz}{8z^3}$, hoc est, $as \infty \frac{z^4 - a^4}{16z^2} + \frac{at}{4 \cdot 1} - \frac{tt}{4 \cdot 2}$

$$+ \frac{t^3}{4 \cdot 3a} - \frac{t^4}{4 \cdot 4aa} \&c. \& \text{ facta divisione per } a, \text{ longitudo Curvæ } s$$

seu BD $\infty \frac{z^4 - a^4}{16az^2} + \frac{t}{4 \cdot 1} - \frac{tt}{4 \cdot 2a} + \frac{t^3}{4 \cdot 3aa} - \frac{t^4}{4 \cdot 4a^3} \&c.$ quæ denique posita $a \infty t \infty 4$, & $z \infty a + t \infty 8$, fit $\frac{15}{16} + 1 - \frac{1}{2} +$

$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c.$ unde cum sit hoc casu $y \infty \frac{z^2 - aa}{4z} \infty \frac{3}{2}$, & æ

$\propto \frac{y^2}{a} \propto \frac{9}{16}$, sequitur, quod existente latere recto Parabolæ 4, & abscissa $BG \frac{9}{16}$, aut applicata $GD \frac{3}{2}$, longitudo Curvæ Parabolicæ BD æquetur $\frac{1}{16} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c.

Coroll. Ex serie collata cum XLII. Curvam Parabolicam cum Spatio Hyperbolico inter Asymptotas comparandi modus innotescit. Sufficit monuisse.

LII. *Rectificare Curvam Logarithmicam per seriem & aliter.* Fig. 6.

Insistat axi SA^{σ} Curva Logarithmica CB^{π} , cujus ordinata $AB \propto 1$, subtangens $AK \propto b$, alia quævis applicata $RE (\epsilon^{\epsilon}) \propto z$, ejusque elementum $EF (\epsilon\phi) \propto dz$; quæritur rectificatio portio- nis Curvæ $BE (B^{\epsilon})$. Quoniam per XLVII. elementum abscissæ $AR (A^{\epsilon})$ nempe $FG (\phi\gamma) \propto \frac{b dz}{z}$, erit $EG^2 (EF^2 + FG^2)$

$\propto dz^2 + \frac{bb dz^2}{zz} \propto \frac{zz + bb}{zz} dz^2$, indeque elementum curvæ EG

$(\epsilon\gamma) \propto \frac{dz \sqrt{zz + bb}}{z} \propto$ (terminis fractionis per $\sqrt{zz + bb}$

æque - multiplicatis) $\frac{z dz + bb dz}{z \sqrt{zz + bb}} \propto \frac{z dz}{z \sqrt{zz + bb}} + \frac{bb dz}{z \sqrt{zz + bb}}$,

de quorum summatione hîc quæritur. Prioris membri integrale

purum est $\sqrt{zz + bb}$, quod (ob primam $z \propto AB \propto 1$) inde à

$\sqrt{1 + bb}$ decrefcere (crescere) intelligitur ad usque $\sqrt{zz + bb}$;

adeo ut omnia ejus decremēta (incrementā) huc quadrantia, seu

$S \frac{z dz}{\sqrt{zz + bb}}$ sint $\propto \sqrt{1 + bb} - \sqrt{zz + bb} (\sqrt{zz + bb} - \sqrt{1 + bb})$

hoc est, æqualia differentiæ duarum in B & $E (\epsilon)$ tangentium

rectarum BK & $EN (\epsilon\gamma)$. Posterioris membri $\frac{bb dz}{z \sqrt{zz + bb}}$ integrale,

quoniam ita planum non est, prævia reductione investigare co-

nor, eaque simili huic, qua suprâ Prop. L. pro Curva Loxodromi-

ca fui usus, cum in elementis analogiam quandam observem. Po-

no itaque primò $z \propto \frac{bb}{p}$, eoque mediante transformo $\frac{bb dz}{z \sqrt{zz + bb}}$

in $\frac{-bdp}{\sqrt{bb + pp}}$; deinde facio $\sqrt{bb + pp} \propto p + q$, sive $p \propto \frac{bb - qq}{2q}$;

inde-

indeque elicio $\frac{-bdp}{\sqrt{bb+pp}} \left(\frac{bbd\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha\alpha+bb}} \right) \propto \frac{bdq}{q}$, quod per XLVII. elementum esse cognosco abscissæ cujusdam in Logarithmica, quam tandem ita determino: Quoniam $p \propto \frac{bb-qq}{2q}$, & $z \propto \frac{bb}{p}$, fiet $z \propto \frac{zbbq}{bb-qq}$, sicut vicissim $q \propto \frac{-bb+b\sqrt{\alpha\alpha+bb}}{\alpha}$; & quia prima $z \propto AB \propto 1$, erit quæ huic respondet prima $q \propto -bb + b\sqrt{1+bb}$. Pro constructione, abscindo in tangente BK partem $K\alpha \propto KA$, in ordinata AB partem $BV \propto B\alpha$, & in V statuo VX parallelam ipsi AK; pari modo in tangente $\nu\epsilon$ (idem imaginatione supple in NE) sumo $\nu r \propto \nu\epsilon$, hinc $\epsilon v \propto \epsilon r$, & duco vx parallelam $\nu\epsilon$; quo pacto constat fore $VX \propto$ primæ $q \propto -bb + b\sqrt{1+bb}$, & $vx \propto$ ultimæ $q \propto \frac{-bb+b\sqrt{\alpha\alpha+bb}}{\alpha}$. Quocirca si ambæ VX & vx, vel etiam loco harum sola quarta proportionalis ad VX, vx & AB (quæ sit SC vel $\sigma\alpha$) applicetur Logarithmicæ, erit intercepta applicatis VX & vx axis portio, vel etiam ipsis AB, SC ($\sigma\alpha$) interjecta portio AS ($A\sigma$) [ex natura enim curvæ æqualis utrisque intercipientur] $\propto S \frac{bdq}{q}$, id est, omnibus $\frac{bdq}{q}$, seu omnibus $\frac{bbd\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha\alpha+bb}}$ pro portione curvæ BE ($B\epsilon$) rectificanda inservientibus. Et quoniam posita differentia inter AB & SC ($\sigma\alpha$) $\propto \alpha$, resegmentum axis AS ($A\sigma$) $\propto b\alpha \int \frac{b\alpha\alpha}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} \int \frac{bbd\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha\alpha+bb}}$ summa etiam per seriem reperta. Additis itaque amborum summis fient omnia EG ($\epsilon\gamma$) seu longitudo curvæ BE ($B\epsilon$) $\propto \sqrt{1+bb} = \sqrt{\alpha\alpha+bb} + b\alpha \int \frac{b\alpha\alpha}{2} + \frac{b\alpha^3}{3} \int \frac{b\alpha^4}{4} \&c. \propto$ differentiarum tangentium BK & EN ($\epsilon\nu$) unà cum resegmento axis AS ($A\sigma$).

Cum non omnes quantitates surdæ, nedum transcendentes, differentialibus admixta precedentibus modis in rationales transformari, inque series converni possint, ad alia subinde nobis artificia recurrendum est ad obtinendum propositum, inter quæ ob universalitatem suam eminent Interpolations

rationes Wallisianæ, vel Exaltatio binomii ad potestatem indefinitam, vel Assumptio seriei fictæ instar quæsitæ, aut consimilia subsidia alia, quorum pro re nata nunc unum nunc plura in usum verti queunt. Nos pauca eorum specimina post generalia nonnulla in uno alterove exemplo subjungemus.

LIII. *Quantitatem quamcunque surdam vel irrationalem in seriem infinitam rationalium convertere per interpolationes Wallisianas.*

Reducatur quantitas rationalis, cujus potestas fracta sive radix aut latus quæritur, ad fractionem hujus formæ $\frac{l}{m-n}$ (ponendo $m < n$). Hujus fractionis potestates integræ, prima, secunda, tertia, &c. convertantur ope divisionis continuæ in totidem series, per XXXVI. usque ad XL. Propp. hoc pacto:

Exp.	Potest.											
0	1	∞	1	+	0	+	0	+	0	+	0	&c.
1	$\frac{l}{m-n}$	∞	$\frac{l}{m}$	+	$\frac{ln}{mm}$	+	$\frac{lnn}{m^3}$	+	$\frac{ln^3}{m^4}$	+	$\frac{ln^4}{m^5}$	&c.
2	$\frac{ll}{Q: m-n}$	∞	$\frac{ll}{mm}$	+	$\frac{2lln}{m^3}$	+	$\frac{3llnn}{m^4}$	+	$\frac{4lln^3}{m^5}$	+	$\frac{5lln^4}{m^6}$	&c.
3	$\frac{l^3}{C: m-n}$	∞	$\frac{l^3}{m^3}$	+	$\frac{3l^3n}{m^4}$	+	$\frac{6l^3nn}{m^5}$	+	$\frac{10l^3n^3}{m^6}$	+	$\frac{15l^3n^4}{m^7}$	&c.
4	$\frac{l^4}{Bq: m-n}$	∞	$\frac{l^4}{m^4}$	+	$\frac{4l^4n}{m^5}$	+	$\frac{10l^4nn}{m^6}$	+	$\frac{20l^4n^3}{m^7}$	+	$\frac{35l^4n^4}{m^8}$	&c.

In his seriebus observabis, coëfficientes primorum terminorum constituere unitates, coëfficientes secundorum numeros laterales, tertiorum trigonales, quartorum pyramidales, & sic porrò; terminos verò puros ordine oriri ex ductu fractionis $\frac{l}{m}$ (ad potestatem elevatæ similem ei ad quam elevanda fractio $\frac{l}{m-n}$) in $1, \frac{n}{m}, \frac{nn}{mm}, \frac{n^3}{m^3}, \&c.$ Hinc ad inveniendas potestates intermedias sive radices (ceu media quædam geometrica, quorum exponentes sunt arithmetice medii inter exponentes integrorum) numeri terminorum figurati tantum sunt interpolandi juxta doctrinam Wallisii Prop.

Prop. 172. seqq. Arithm. Infin. Est vero, posito exponente vel indice potestatis p , generalis character lateralium quoque p , trigonali-
 um $\frac{p \cdot p + 1}{1 \cdot 2}$, pyramidalium $\frac{p \cdot p + 1 \cdot p + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, &c. ut ibid. docetur

Prop. 182. Quare si p interpreteris per $\frac{1}{2}$, invenies potestatem dimidiam

quantitatis $\frac{l}{m-n}$, nempe $\sqrt{\frac{l}{m-n}} \propto \sqrt{\frac{l}{m}}$ in $1 + \frac{1n}{2m} + \frac{1 \cdot 3 nn}{2 \cdot 4 mm} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 n^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 m^3}$

$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 n^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 m^4} + \&c.$ si p explices per $\frac{1}{3}$, habebis trientem potestatis

seu $\sqrt[3]{C. \frac{l}{m-n}} \propto \sqrt[3]{C. \frac{l}{m}}$ in $1 + \frac{1n}{3m} + \frac{1 \cdot 4 nn}{3 \cdot 6 mm} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 n^3}{3 \cdot 6 \cdot 9 m^3} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 n^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 m^4}$

$+ \&c.$ si per $\frac{3}{2}$, obtinebis sesquialteram potestatem seu $\frac{l}{m-n} \sqrt{\frac{l}{m-n}}$

$\propto \frac{l}{m} \sqrt{\frac{l}{m}}$ in $1 + \frac{3n}{2m} + \frac{3 \cdot 5 nn}{2 \cdot 4 mm} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 n^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 m^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 n^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 m^4} + \&c. \&c.$

Coroll. Quoniam positis l, m & n æqualibus inter se, fit quantitas $\frac{l}{m-n} \propto \frac{l}{0} \propto \infty$, series autem prædictæ abeunt in series purorum

coëfficientium $1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \&c. 1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \&c.$

$1 + \frac{3}{2} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \&c.$ colligimus, series ejusmodi natas ex

ductu continuo fractionum, quarum numeratores & denominatores in progress. arithm. per differentias primo denominatori æquales in-

surgunt, summas fundere infinitas; quod apertius ita constabit: Minue numeratores, eosque æquales constitue denominatoribus

singulos singulis, nempe secundum numeratorem primo denomina-
 tori, tertium secundo, 4^{um} 3^{io}, & ita deinceps; sic enim ex. gr.

loco primæ seriei habebis $1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \&c. \propto$

(perimentibus se mutuo dictis numeris) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \&c. \propto \infty$,

per Cor. 2. XVI, unde fortius altera $1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \&c.$

ob numeratores majores infinita erit. Cæterum postremus termi-

nus cujusque seriei nunc nullus est nunc infinitus, prout exponens potestatis p , vel prima seriei fractio, unitate minor est majorve: Sic

ultimus

ultimus terminus primæ seriei $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$ &c. nullus est; nam si quantus esset, etiam hic foret quantus $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$ &c. utpote cujus singuli factores singulis factoribus præcedentis termini ordine sumtis sunt majores; quare & utriusque productum quantum foret, np. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$ in $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$ &c. ∞ (permistis alternatim utriusque factoribus) $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots \infty - 1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots \infty}$ ∞ (ob numeratores omnes primum sequentes, & denominatores ultimum præcedentes se mutuò perimentes) $\frac{1}{\infty} \infty 0$, quod absurdum. Ultimus contra terminus tertiæ seriei $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$ &c. infinitus est; nam si finitus esset, etiam hic foret finitus $\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$ &c. utpote cujus singuli factores singulis illius sunt minores; quocirca & utriusque productum finitum foret, nempe $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}$ &c. in $\frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ &c. $\infty \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots \infty}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots \infty - 1} \infty$ (destruentibus se mutuo numeratoribus qui ultimum præcedunt, & denominatoribus qui primum sequuntur) $\frac{\infty}{2} \infty \infty$, quod pariter absurdum.

LIV. *Idem præstare per exaltationem binomii ad potestatem indefinitam.*

Quantitas rationalis, cujus potestas per seriem desideratur, sit expressa per binomium $1 + n$ (ponendo $1 > n$). Hujus binomii potestas indefinita p , ut jam passim inter Geometras notum, per seriem exprimitur $1 + \frac{p}{1} n + \frac{p \cdot p - 1}{1 \cdot 2} n n + \frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 + \frac{p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot p - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} n^4 + \text{&c.}$ ubi perspicuum est, quod quotiescunque exponens potestatis p est numerus integer & positivus, series necessariò aliquando abrumpetur; quandoquidem in continuatione ulteriori coëfficientium $p \cdot p - 1 \cdot p - 2 \cdot \text{&c.}$ necessariò tandem devenietur ad $p - p \infty 0$; quod proin illum terminum & ab illo deinceps omnes evanescere facit. Sed quoties p numerus fractus est aut negativus, coëfficientes nunquam in nihilum abibunt, ac idè series in infinitum excurreret: qua ratione habetur ex. gr. $\sqrt{1 + n}$ (ubi p valet $\frac{1}{2}$) ∞
 $1 +$

$1 + \frac{x}{2}n - \frac{1}{2.4}nn + \frac{1.3}{2.4.6}n^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}n^4 + \&c.$ & $\sqrt{C.1+n}$ (ubi p
 valet $\frac{1}{3}$) $\infty 1 + \frac{1}{3}n - \frac{2}{3.6}nn + \frac{2.5}{3.6.9}n^3 - \frac{2.5.8}{3.6.9.12}n^4 \&c.$ & $\sqrt[3]{1+n}$
 (ubi p notat $-\frac{x}{2}$) $\infty 1 - \frac{x}{2}n + \frac{1.3}{2.4}nn - \frac{1.3.5}{2.4.6}n^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}n^4 - \&c.$
 & pariter in cæteris.

Nota, quòd exaltatio binomii ad potestatem indefinitam & interpolationis negotium reapse in idem recidunt, unoque & eodem nituntur fundamento, quod consistit in proprietate quadam numerorum figuratorum supra jam prælibata Propos. XIX. sed cujus demonstrationem, ne hîc nimii simus, in aliam occasionem reservamus. \times

v. Jones Synops
p. 168

L V. *Duarum quantitatum indeterminatarum relationem unius ad alteram per seriem exprimere, ope assumptæ seriei fictæ instar quesita.*

Ponatur alterutra indeterminatarum x & y , quarum ratio ad se invicem quæritur, putà y , æquari seriei $a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. aut $a + bxx + cx^4 + ex^6$, &c. aut $a + bx^4 + cx^8 + ex^{12}$, &c. aut simili, prout opus videbitur; atque tum in quantitate vel æquatione proposita loco y substituatur hæc series, nec non loco dy & ddy , &c. seriei differentiale aut differentio-differentiale, &c. quo factò ex comparatione homologorum terminorum determinari poterunt assumpti coëfficientes a, b, c , &c. Sequuntur Exempla:

L VI. *Invenire relationem coordinatarum Curvæ Elastice per seriem.*
Fig. 7.

Flectatur Elater in curvaturam AQR à potentia applicata in A , & trahente juxta directionem AZ ; sitque AB vel $RZ \infty a$, AE vel $PQ \infty x$, AP vel $EQ \infty y$, & $AQ \infty z$; ostensum est in Act. Lips. 1694. p. 272. & 1695. p. 538. naturam hujus curvæ exprimi æquatione $dy \infty \sqrt{\frac{xxdx}{a^4 - x^4}}$, è qua qui methodo Diophanti, qua in præced. part. usi fuimus, irrationalitatem tollere vellet, ætatem consumeret; cum deprehensum sit à Geometris, summam vel differentiam duorum bi-quadratorum, qualis est $a^4 - x^4$, nunquam posse constituere qua-

P p

dratum:

dratum : Quare nobis confugiendum est vel ad Interpolationes , vel ad indefinitam Potentiam binomii , hoc pacto :

1. *Mod.* Interpretemur x^4 tam per l , quàm per n , & a^4 per m ; erit $\frac{x^4}{a^4 - x^4} \propto \frac{l}{m-n}$; unde per LIII habetur $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$, id est, $\sqrt{\frac{x^4}{a^4 - x^4}}$ aut $\frac{xx}{\sqrt{a^4 - x^4}} \propto \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}} + \&c.$ & (facta multiplicatione per dx) $\frac{xx dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ seu $dy \propto \frac{xx dx}{aa} + \frac{1x^6 dx}{2a^6} + \frac{1.3x^{10} dx}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14} dx}{2.4.6a^{14}} + \&c.$ & denique summando, AP seu $y \propto \frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} + \&c.$

2. *Mod.* Explicemus nunc a per 1 , & $-x^4$ per n ; erit $a^4 - x^4 \propto 1 + n$, & $\frac{1}{\sqrt{a^4 - x^4}} \propto \frac{1}{\sqrt{1+n}}$: unde per LIV. fit $\frac{1}{\sqrt{1+n}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{a^4 - x^4}} \propto 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1.3}{2.4}x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{12} + \&c.$ & (multiplicand. per $xx dx$) $\frac{xx dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} \propto xx dx + \frac{1}{2}x^6 dx + \frac{1.3}{2.4}x^{10} dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{14} dx + \&c.$ & integrando, $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2.7}x^7 + \frac{1.3}{2.4.11}x^{11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15}x^{15} + \&c.$ seu denique supplendo unitatem; $\frac{x^3}{3aa} + \frac{1x^7}{2.7a^6} + \frac{1.3x^{11}}{2.4.11a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} + \&c.$ ut antea.

Coroll. Sumta $x \propto a \propto 1$, fit tota $AZ \propto \frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} + \&c.$ Conf. Act. Lips. 1694. p. 274. & 369.

LVII. Rectificare eandem Curvam seriem. Fig. 7.

Quia æquatio curvæ, ut dictum, est $dy \propto \frac{xx dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, fiet quadrando $dy^2 \propto \frac{x^4 dx^2}{a^4 - x^4}$ & $dz^2 \propto dy^2 + dx^2 \propto \frac{x^4 dx^2}{a^4 - x^4} + dx^2 \propto \frac{a^4 dx^2}{a^4 - x^4}$, adeoque $dz \propto \frac{a dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Exponamus a^4 nunc per l , nunc per m , & x^4 per n , erit $\frac{aa}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ seu $\sqrt{\frac{aa}{a^4 - x^4}} \propto \sqrt{\frac{l}{m-n}}$; unde
per

per LIII. fit $\sqrt{\frac{l}{m-n}}$ five $\sqrt{\frac{a^4}{a^4-x^4}} \infty 1 + \frac{1 \times 4}{2 a^4} + \frac{1 \cdot 3 \times 8}{2 \cdot 4 a^8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \times 12}{2 \cdot 4 \cdot 6 a^{12}}$
 $+ \&c.$ & (multiplic. per dx) $\frac{a a dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ feu $dz \infty dx + \frac{1 \times 4 dx}{2 a^4}$
 $+ \frac{1 \cdot 3 \times 8 dx}{2 \cdot 4 a^8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \times 12 dx}{2 \cdot 4 \cdot 6 a^{12}} + \&c.$ tandemque summando, z five
 $AQ \infty x + \frac{1 \times 5}{2 \cdot 5 a^4} + \frac{1 \cdot 3 \times 9}{2 \cdot 4 \cdot 9 a^8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \times 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13 a^{12}} + \&c.$ Idem etiam
 per LIV. simili modo ostendetur.

Coroll. Facta $x \infty a \infty 1$, habetur tota $AQR \infty 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9}$
 $+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \&c.$ vid. Act. Lips. 1694. p. 274.

L V I I I. Definire limites precedentium serierum. Fig. 7.

Quoniam series his methodis repertæ nimis lentè convergunt, non abs re erit, si modum ostendam, quo levi labore summis earum, quantum ad usum sufficit, approximare & limites constituere possimus. In exemplum propositæ sint proximæ duæ series, quibus exprimitur applicata Elasticæ BR vel AZ , & longitudo ipsius curvæ AR , nempe: $\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 15} + \&c.$

& $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \&c.$ Sumo quantitatem, cujus integrale haberi possit, datis $\frac{xx dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ & $\frac{1 a a dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, è quibus

series propositæ fluxerunt, affinem, putà $\frac{x^3 dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, cujus integrale est $\frac{aa - \sqrt{a^4-x^4}}{2}$, eamque pari methodo in seriem resolvo, &

seriei terminis summatis pro x & a unitatem pono; quo pacto series emerget: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 12} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 16} + \&c.$ æqualis

proinde $\frac{aa - \sqrt{a^4-x^4}}{2} \infty \frac{x}{2}$ feu 0. 5000000. Colligo jam singularum serierum terminos aliquot ab initio in unam summam (quod expeditè fit per Logarithmos) ex. gr. decem primos terminos, qui collecti efficiunt in prima serie 0. 5102560: in secunda serie 1. 2207187: in tertia 0. 4119014. Hujus igitur reliqui post

decimum termini (ad complendum $\frac{1}{2}$ seu 0. 5000000) constituent 0. 0880986, qui numerus additus summæ 10 primorum terminorum in pr. & sec. serie exhibet 0. 5983546 & 1. 3088173, summis totarum serierum justo minores, ob singulos tertiæ seriei terminos minores homologis terminis reliquarum.

Deinde, quia undecimi termini in tribus istis seriebus sunt

$$\frac{1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19}{2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 43} > \frac{1. 3. 5. \dots 19}{2. 4. 6. \dots 20. 41} > \frac{1. 3. 5. \dots 19}{2. 4. 6. \dots 20. 44}$$

liquet terminum hunc in serie tertia ad eundem in serie prima reciproçè esse ut 43 ad 44, & ad eundem in secunda ut 41 ad 44; terminorum verò sequentium singulos in tertia serie ad ejusdem ordinis terminos in reliquis seriebus habere rationem majorem quàm 43 ad 44, & quàm 41 ad 44: unde & summa omnium sequentium decimum in tertia serie ad summam omnium post decimum in reliquis seriebus majorem rationem habebit. Idcirco si fiat, ut 43 ad 44, nec non ut 41 ad 44, ita summa terminorum post decimum in tertia serie, nimirum 0. 0880986, ad 0. 0901474 & ad 0. 0945448; erunt hi numeri majores summis terminorum decimum sequentium in prima & secunda serie: quapropter si addantur summis 10 priorum, quæ sunt 0. 5102560 & 1. 2207187, erunt quoque numeri provenientes 0. 6004034 & 1. 3152635 majores summis totarum serierum.

Reperti ergo sunt limites, quibus summæ primæ & secundæ seriei definiuntur: limites illius sunt 0. 5983546 & 0. 6004034; hujus 1. 3088173 & 1. 3152635: unde applicata *BR* vel *AZ* major est quàm 0. 598, & minor quàm 0. 601; ipsa verò curva *AR* $>$ 1. 308, & $<$ 1. 316, sic ut tres istæ lineæ *RZ*, *AZ* & *AQR* proximè se habeant ut 10, 6, 13. Conf. Act. Lips. 1694. p. 274.

Schol. Quoniam ex natura descensus gravium demonstratur, quòd tempus descensus penduli alicujus per quadrantem circuli ad tempus descensus perpendicularis per ejus radium eam rationem habet, quam habet Curva Elastica *AR* ad ejus axem *RZ*, h. e. majorem, ut ostendimus, quàm 1308 ad 1000, & minorem quàm 1316 ad 1000: tempus autem descensus perpendicularis per circuli radium ad tempus per semiradium se habet, ut $\sqrt{2}$ ad 1: & tempus per semiradium

miradium ad tempus per arcum minimum (consentiente Hugenio in Horol. Oscillat. p. 155.) ut diameter circuli ad ejus semiperipheriam, h. e. ut 226 ad 355 : inferri potest ex æquo, quòd tempus descensus penduli per quadrantem integrum ad tempus descensus ejus per arcum minimum se habet in ratione majore quàm 3400 ad 2888, & in minore quàm 3400 ad 2869; unde rationem 3400 ad 2900, sive 34 ad 29, quam præfatus Auctor ibid. pag. 9. temporibus horum descensuum assignat, extra hos limites cadere liquet.

LIX. *Dati Logarithmi Numerum invenire per seriem.* Fig. 1.

Intelligatur Curva Logarithmica PCQ , cujus axis AD , subtangens constans ∞t , applicata $BC \infty 1$, Logarithmus datus $BI (B')$ ∞x , ejusque Numerus $IO (10) \infty y$; erit ex generali curvarum natura $\int dy . dx :: y . t$, adeoque $y \infty \int \frac{t dy}{dx}$. Fiat juxta præscriptum Prop. LV. $y \infty 1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ &c. & differentiando, $\frac{dy}{dx} \infty b + 2cx + 3exx + 4fx^3$ &c. eritque $1 + bx + cxx + ex^3 + fx^4$, &c. ($\infty y \infty \int \frac{t dy}{dx}$) $\infty \int bt \int 2ctx \int 3etxx \int 4ftx^3 \int 5gtx^4$, &c. & facta comparatione homologorum terminorum elicietur, $b \infty \int \frac{1}{t}$, $c \infty \int \frac{b}{2t}$ $\infty \frac{1}{1.2.t}$, $e \infty \int \frac{c}{3t}$ $\infty \int \frac{1}{1.2.3.t^3}$, $f \infty \int \frac{e}{4t}$ $\infty \frac{1}{1.2.3.4.t^4}$, &c. unde valoribus istis coefficientium b, c, e , &c. substitutis resultat $y \infty 1 \int \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2.t} \int \frac{x^3}{1.2.3.t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.t^4} \int$ &c. Conf. Act. Lips. 1693. p. 179.

Aliter idem absque differentialium adminiculo : Concipiatur Log-us $BI (B')$ divisus in partes quotlibet æquales BE, EF, FG , &c. ($B\varepsilon, \varepsilon\phi, \phi\gamma$, &c.) quarum numerus sit n , & singulæ dicantur d , sic ut nd sit $\infty BI (B') \infty x$. Tum applicatis curvæ rectis totidem EK, FL, GM , &c. ($\varepsilon\kappa, \phi\lambda, \gamma\mu$, &c.) jungantur extremitates C & $K (x)$ duarum $BC, EK (\varepsilon\kappa)$ per rectam $CK (C^x)$, sitque axis portio inter productam $CK (C^x)$ & applicatam BC intercepta ∞t ; quo pacto propter triangula similia fiet $t . 1 (BC) :: t \int d . 1 \int \frac{d}{t} \infty EK (\varepsilon\kappa)$. Et

174

quoniam ob æquales $BE, EF, FG, \&c.$ ($B\varepsilon, \varepsilon\phi, \phi\gamma, \&c.$) ipsæ $BC, EK, FL, \&c.$ ($BC, \varepsilon\kappa, \phi\lambda, \&c.$) in continua sunt proportione, earumque prima $BC \propto 1$, idcirco designabit FL ($\phi\lambda$) secundam potestatem, GM ($\gamma\mu$) tertiam, RN ($\varepsilon\nu$) quartam, $\&c.$ tandemque ultima IO ($\iota\omicron$) seu y ipsam n potestatem applicatæ EK ($\varepsilon\kappa$) seu $1 \int \frac{d}{t}$ (pro numero vid. particularum, in quas divisa est BI ($B'\iota$); quæ quidem potestas per LIV.

reperitur $\propto 1 \int \frac{nd}{t} + \frac{n.n-1.dd}{1.2tt} \int \frac{n.n-1.n-2.d^3}{1.2.3t^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.d^4}{1.2.3.4t^4}$

$\int \&c.$ Quòd si jam numerus particularum n ponatur infinitus, producta CK ($C\kappa$) abibit in tangentem, & ipsa t in subtangentem Logarithmicæ, atque præterea numeri $1, 2, 3, \&c.$ evanescent præ n , sic ut $n-1, n-2, n-3$, tantundem valeant ac n : quare tum fiet $y \propto 1 \int \frac{nd}{t} + \frac{nn dd}{1.2tt} \int \frac{n^3 d^3}{1.2.3t^3} + \frac{n^4 d^4}{1.2.3.4t^4} \int \&c. \propto$ (propter $nd \propto x$) $1 \int \frac{x}{t} + \frac{xx}{1.2tt} \int \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \frac{x^4}{1.2.3.4t^4} \int \&c.$ ut supra.

Nota, quòd existente $x > t$, termini quidem seriei aliquosque crescunt, tandem tamen decrefcere pedetentim occipiunt, ultimoque vergunt in nihilum. Nam sumtis ab initio m terminis, erit ex lege progressionis sumtorum ultimus $\frac{x^{m-1}}{1.2.3 \dots m-1.t^{m-1}}$,

& sequens ultimum $\frac{x^m}{1.2.3 \dots m.t^m}$; adeoque ratio illius ad hunc,

ut mt ad x : unde cum ratio t ad x determinata sit, numerus verò terminorum m usque & usque major possit accipi, ratio quoque mt ad x tandem quavis data major fiet. Existente autem $x \propto$ vel $< t$, series ista, & aliæ hujus generis, statim ab initio celerrimè convergunt, eoque celerius quò minor x : unde discimus quod multo commodius & minori cum labore Logarithmorum Canon adornari possit, si per hanc Propos. ex Log-is datis Numeri, quàm si vicissim per XLVII. ex Numeris datis Log-i quærantur. Quamquam & illic compendium sese nobis offerat non contemnendum, quod quia in dicta Propos. intactum præterit, breviter hîc indicandum restat: Quoniam positus in Logarithmica (Fig. 6.) AB

∞a , subtang. $AK \infty t$, $BI \infty u$, & $B' \infty s$, adeoque $RE \infty a - u$,
& $e^e \infty a + s$, invenitur per XLVII, AR (Log-us RE) ∞t in

$$\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c. \quad \& \quad A_e \text{ (Log-us } e^e) \infty t \text{ in}$$

$$\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c. \text{ sequitur ex natura Log-micæ,}$$

has duas series inter se æquari, si tres applicatæ RE , AB , e^e , seu, $a - u$,
 a & $a + s$ continuè proportionentur, h. e. si statuatur $u \infty \frac{as}{a+s}$; sed

quia per hanc hypothesin perpetuo fit $u < s$, & nominatim hac
sumta ∞a , $\frac{1}{2} a$, $\frac{1}{3} a$, &c. illa fit $\infty \frac{1}{2} a$, $\frac{1}{3} a$, $\frac{1}{4} a$, &c. multò
semper celerius prior series converget posteriore: unde plurimum
laboris in practica effectione log-orum rescindi poterit, si loco
hujus illa surrogetur, ex. gr. si (facta $s \infty a$) loco seriei $1 - \frac{1}{2}$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c. \text{ hoc est, loco } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8}$$

$$+ \&c. \text{ substituatur } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c.$$

quippe per cujus primos 18. terminos tantundem approximatur,
quantum per mille terminos alterius; quod ipsum etiam ad Co-
roll. 3. XLVII. in subtangente Log-micæ definienda observabi-
tur. Sed rei utilissimæ uberiolem explicationem angustia paginæ
non permittit.

Schol. Si summa quædam pecuniæ fœnori elocata sit, ea lege
ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ in sortem
computetur; exponatur autem ipsa fors per BC seu 1 , tempus an-
nuum per BI seu x divisum in punctis E, F, G , &c. in momenta
innumera æqualia, atque usura annua per $\frac{x}{t}$; inventa series $1 + \frac{x}{t}$

$$+ \frac{xx}{1.2tt} + \frac{x^3}{1.2.3t^3} + \&c. \text{ hoc est, (explicata forte } 1 \text{ per } a, \&$$

$$\text{usura } \frac{x}{t} \text{ per } b) a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2.3aa} + \frac{b^4}{2.3.4a^3} + \&c. \text{ indicabit}$$

valorem ejus, quod finito anno debebitur. Cum enim, ut tempus
annuum BI ad primum ejus momentum BE , seu ut x ad d , ita se-

habeat usura annua $\frac{x}{t}$ ad partem proportionalem usuræ, erit hæc $\frac{d}{t}$

signifi-

significabitque $1 + \frac{d}{t}$ seu applicata EK sortem dicta parte proportionali usuræ auctam: unde fors aucta EK secundo momento pariet FL, & hæc pariter tertio momento pariet GM, & sic porrò, propter BC, EK, FL, GM, &c. $\ddot{\cdot}$. Quare postrema applicata IO, quam series inventa exprimit, denotabit valorem ejus, quod creditori elapso toto anno debetur. Conf. Act. Lips. 1690. p. 222.

LX. *Invenire aream spatii comprehensi à Curva genitrice Elastica, seu qua evolutione sui Elasticam describit. Fig. 7.*

Describatur Elastica AQR ex evolutione Curvæ MNT, & sit filum evolvens QN (DG), quod productum secet axem in V; ponaturque, ut supra, RZ $\propto a$, PQ $\propto x$, AP $\propto y$. Quoniam ex Act. Lips. 1694. p. 273. manifestum est, quòd QN $\propto \frac{1}{2} QV$, erit & NH $\propto \frac{1}{2} PQ \propto \frac{1}{2} x$, & NS $\propto \frac{1}{2} FQ \propto \frac{1}{2} dx$; ac proinde ob ang. rect. DQN: DF. FQ ($:: dy \cdot dx ::$ [ex natura Elastice] $xx \cdot \sqrt{a^4 - x^4}$) $:: \frac{1}{2} dx (NS) \cdot \frac{dx \sqrt{a^4 - x^4}}{2xx} \propto SG$ vel HI. Quare HI in NH seu $\square NI \propto \frac{xdx\sqrt{a^4 - x^4}}{4xx} \propto \frac{a^4x - x^5, dx}{4xx\sqrt{a^4 - x^4}} \propto \frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4 - x^4}} - \frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}} \propto$ Elemento spatii MNHZ, de cujus summatione jam agitur. Posterioris membri $\frac{x^3dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$ integrale pertinens ad partem curvæ RQ vel MN est $\frac{1}{8} \sqrt{a^4 - x^4}$. Prius autem $\frac{a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4 - x^4}}$ cum absolute summari nequeat, sublata irrationalitate in seriem convertetur, ut sequitur.

Ponatur $\sqrt{a^4 - x^4} \propto \frac{t^3x}{a} - aa$, fiet $xx \propto \frac{2a^3t}{aa + tt}$, & differentiando $-xdx \propto \frac{a^3tt - a^5, dt}{Q:aa + tt}$; nec non $\frac{t^3x}{a} - aa (\sqrt{a^4 - x^4}) \propto \frac{a^3tt - a^4}{aa + tt}$, & denique $\frac{-a^4xdx}{4xx\sqrt{a^4 - x^4}} \propto \frac{aadt}{8t}$. Jam quia existente maxima $x \propto a$, ipsa quoque $t \propto a$, & illa decrescente crescit hæc, statuatur

statuatur $t \propto a + s$, ut sit $\frac{aadt}{8t} \propto \frac{aads}{8a+s} \propto \frac{aa}{8} \text{ in } \frac{ds}{a+s} \propto \frac{aa}{8} \text{ in}$

$\frac{ds}{a} - \frac{sds}{aa} + \frac{ssds}{a^3} - \frac{s^3ds}{a^4} + \&c.$ per XXXVII: unde facta sum-

matione habetur $S \frac{aadt}{8t} (\propto S \frac{a^4 x dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}}$, dissimulato nempe signo —, quod hinc nota tantum est respectivi decrementi ipsarum x)

$\propto \frac{aa}{8} \text{ in } \frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.$ demtoque $S \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4-x^4}}$

$\propto \frac{1}{8} \sqrt{a^4-x^4}$, resultat $S \frac{a^4 x dx}{4xx\sqrt{a^4-x^4}} - S \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4-x^4}} \propto \frac{aa}{8}$

in $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} - \frac{s^4}{4a^4} + \&c.$ — $\frac{1}{8} \sqrt{a^4-x^4}$ spatio nempe

quæsito $MNHZ$. Et quia, sumta $u \propto \frac{as}{a+s}$, series $\frac{s}{a} - \frac{ss}{2aa} + \frac{s^3}{3a^3} -$

$\&c.$ æquatur seriei $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.$ per Annot. præc.

Propos. idcirco dictum spatium $MNHZ$ quoque sic exprimetur, $\frac{aa}{8}$

in $\frac{u}{a} + \frac{uu}{2aa} + \frac{u^3}{3a^3} + \frac{u^4}{4a^4} + \&c.$ — $\frac{1}{8} \sqrt{a^4-x^4}$.

Nota, si statuatur $aa \propto 8$, & $s \propto a$, adeoque $t(a+s) \propto 2a$,
 & $x \left(\sqrt{\frac{2a^3t}{aa+tt}} \right) \propto 2a\sqrt{\frac{1}{5}}$, & $u \left(\frac{as}{a+s} \right) \propto \frac{1}{2}a$: hoc est, si
 constructo super MZ , femisse ipsius RZ , semicirculo inscribatur
 Triangulum Isosceles MCZ , cujus crus MC unitatem designet, at-
 que Curvæ MNT applicetur $NH \left(\frac{1}{2}x \right) \propto \sqrt{\frac{8}{5}}$, prædictum spa-
 tium $MNHZ$ fiet $\propto 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \&c.$ — $\frac{3}{5}$. vel etiam
 $\propto \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \&c.$ — $\frac{3}{5}$. Conf. Act.

Lips. 1694. p. 273.

Coroll. I. Quoniam ex iis, quæ loc. modo cit. Actorum docui-
 mus, colligi potest, quod $QV \propto \frac{aa}{x}$, & $QN \propto \frac{1}{2} QV \propto \frac{aa}{2x}$, &
 Qq
 DQ seu

DQ seu $dz \propto \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; sequitur, triangulum QGD (QD in $\frac{z}{2} QN$)

$\propto \frac{a^2 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}}$, & per consequens omnia triangula QGD seu spatium

$RMNQR \propto S \frac{a^2 dx}{4x\sqrt{a^4 - x^4}} \propto$ (ut ostensum) spatio $MNHZ + S \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$.

unde cum $S \frac{x^3 dx}{4\sqrt{a^4 - x^4}}$ seu $\frac{1}{8} \sqrt{a^4 - x^4}$ exprimat quadrantem spatii Elastici $PQRZ$ (ut per se liquet), concludimus, spatium $RMNQR$ excedere aream $MNHZ$ quarta parte ipsius $PQRZ$.

Coroll. 2. Quia differentiale $\frac{a^2 dt}{8t}$, ad quod reduximus elementum spatii $MNHZ$ vel $RMNQR$, elementum quoque denotat spatii hyperbolici inter asymptotas, cujus abscissa à centro est $\propto t$, ipsa vero t in assumpta hypothese $\sqrt{a^4 - x^4} \propto \frac{t^2 x}{a} - aa$ propter x decrescentem ad nihilum excrescat in infinitum, & spatium hyperbolicum in infinitum protensum sit infinitum; idcirco & spatium

totum interminatum genitricis Elastice $MNTXZ$ seu

$NTXH$ infinitum erit. Vid. Act. Lips.

loc. cit.

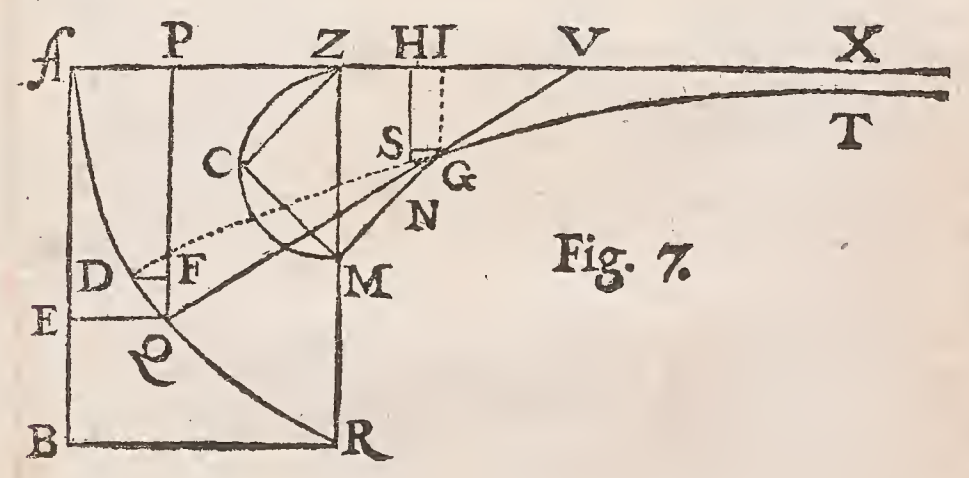
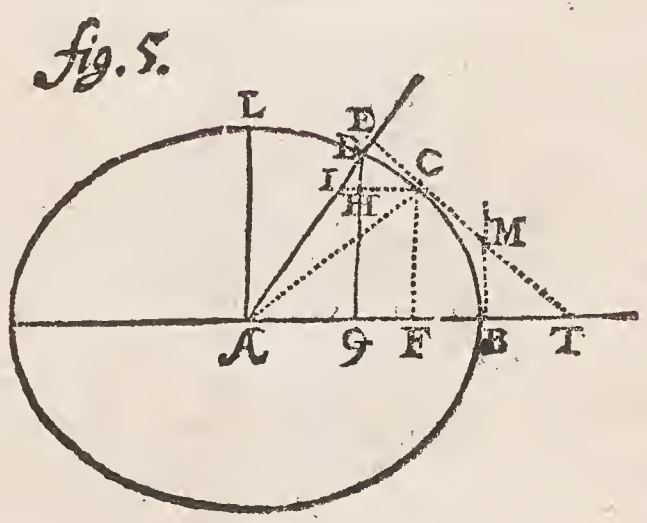
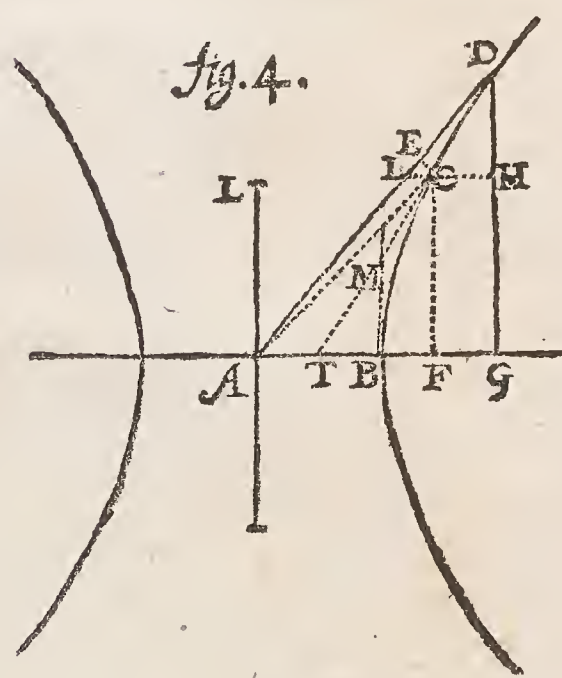
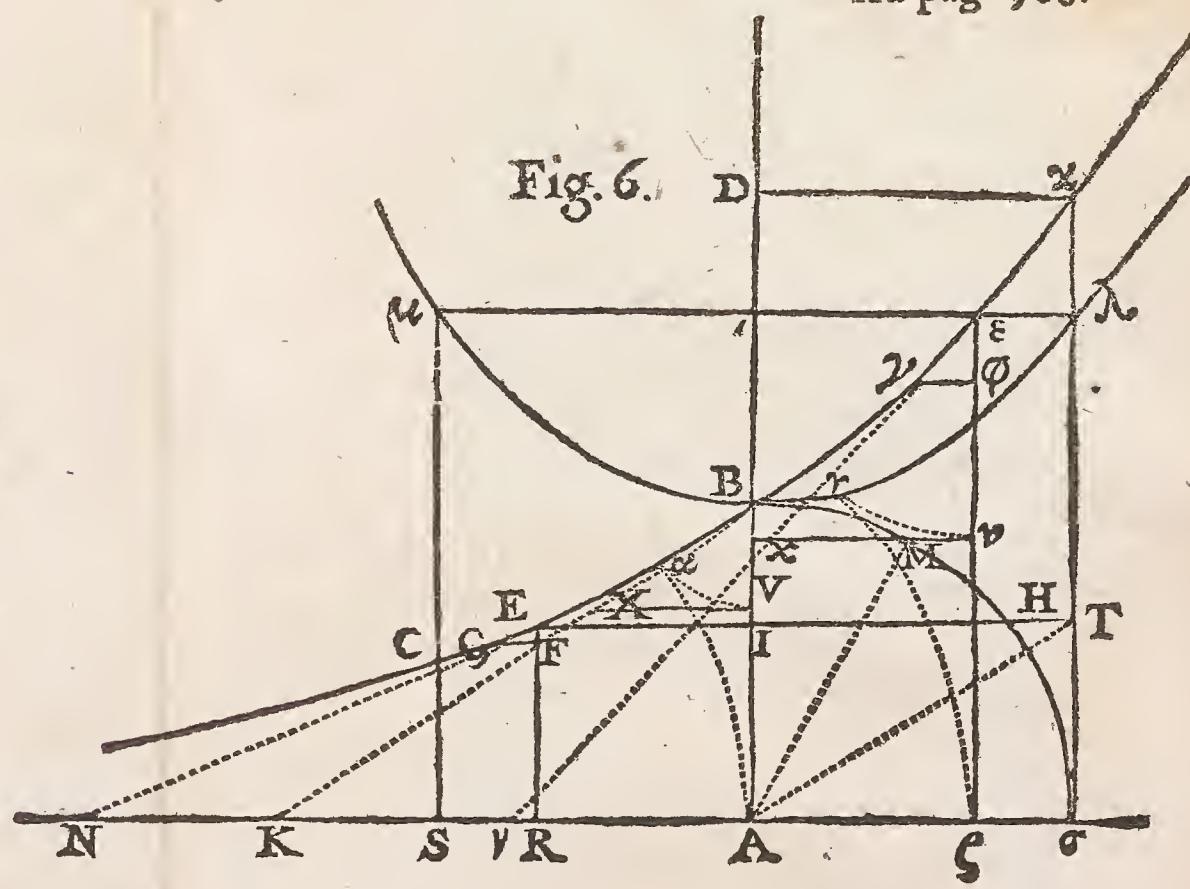
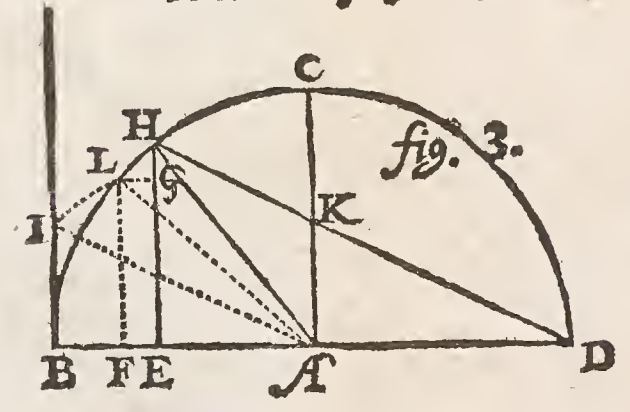
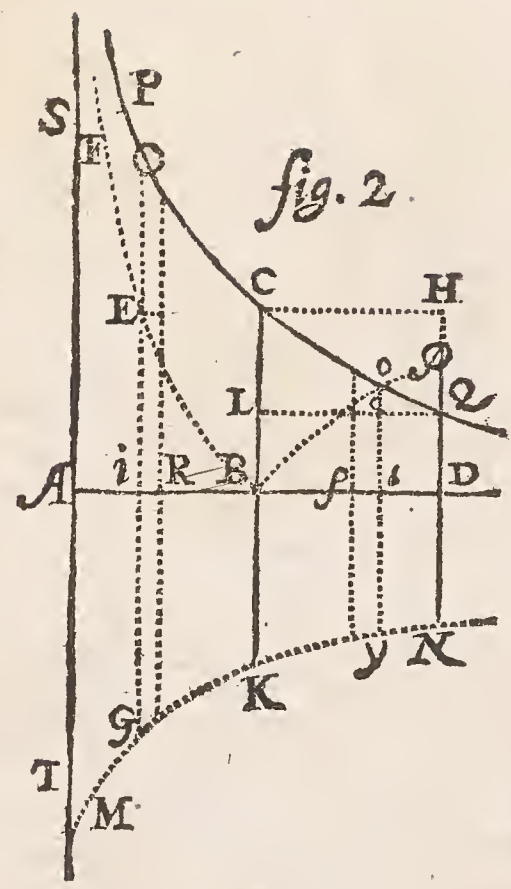
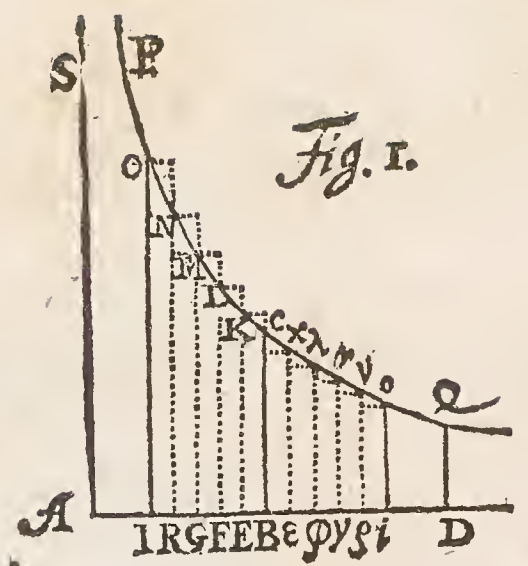
UT non-finitam Seriem finita coërcet,
Summula, & in nullo limite limes adest:

Sic modico immensi vestigia Numinis hærent

Corpore, & angusto limite limes abest.

Cernere in immenso parvum, dic, quanta voluptas!

In parvo immensum cernere, quanta, Deum!



Q9 2

QA Bernoulli, J.,
273.43 1654-1705.
B52 Jacobi Bernoulli
1713 profess. basil.
RB ... 1713.
NMAH



3 9088 00032 3931
SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES

100

3/16
in Spitzkohl
Kraut
Kraut

76065

